Devoir de mathématiques

À rendre le lundi 22 avril 2024

EXERCICE 1

Calculs d'intégrales **(3 points)**

Calculer les intégrales suivantes :

1) $I = \displaystyle\int_1^3 (t^3 - 2t)\,\mathrm{d}t$.

2) $I = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{2}{x+3} - \frac{1}{2x+1}\right)\mathrm{d}x$.

3) $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$, on pourra faire une intégration par parties.

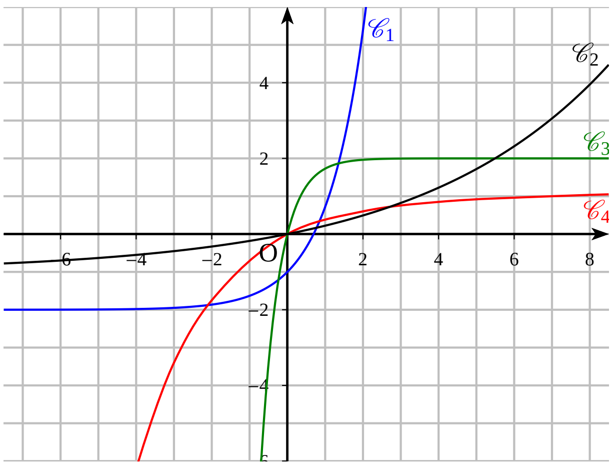
EXERCICE 2

Vrai-Faux **(3 points)**

Pour chacun des énoncés suivants, indiquer si la proposition correspondante est vraie ou fausse et proposer une justification de la réponse choisie.

1) On considère l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = 4$. Parmi les quatre courbes ci-dessous, l'une représente la solution de (E) vérifiant $y(0) = 0$.

   Proposition 1 : « La courbe de la solution de (E) vérifiant $y(0) = 0$ est la courbe $\mathscr{C}_4$. »



2) Soit f une solution non constante de l'équation différentielle $y' = 0,5y - 2$

   Proposition 2 : La représentation de f n'admet pas de tangente horizontale.

3) Soit $F(x) = \displaystyle\int_1^x (2-t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

   Proposition 3 : $F(x)$ est négatif ou nul pour tout réel $x > 1$.

EXERCICE 3

Valeur approchée d'une intégrale **(8 points)**

Partie A

Soit la fonction f définie sur $[1\,;\,4]$ par : $f(x) = x\ln x - 1$.

1) Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f sur $[1\,;\,4]$.
2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[1\,;\,4]$.
3) Déterminer un encadrement de α à 10^{-2}.
4) En déduire le signe de f sur $[1\,;\,4]$.
5) Montrer que $\ln\alpha = \dfrac{1}{\alpha}$.

Partie B

Soit l'intégrale $I = \displaystyle\int_\alpha^4 (x\ln x - 1)\,\mathrm{d}x$, où α est la valeur définie à la partie A.

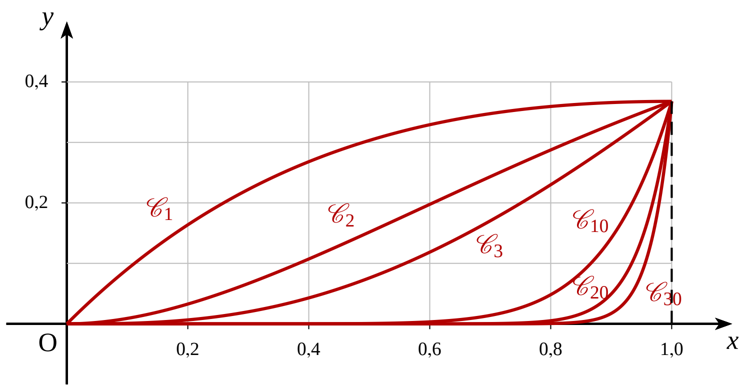
1) À l'aide d'une intégration par parties, calculer $J = \displaystyle\int_\alpha^4 x\ln x\,\mathrm{d}x$.
2) Montrer que $I = \dfrac{\alpha^2}{4} + \dfrac{\alpha}{2} + 16\ln 2 - 8$.
3) En déduire une valeur approchée à 10^{-1} de I.

EXERCICE 4

Suite définie par une intégrale **(6 points)**

Soit la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

1) Calculer I_1 par une intégration par parties.
2) Soit les fonctions f_k définies par $f_k(x) = x^k\,\mathrm{e}^{-x}$.
   On a tracé les courbes $\mathscr{C}_1, \mathscr{C}_2, \mathscr{C}_3, \mathscr{C}_{10}, \mathscr{C}_{20}, \mathscr{C}_{30}$ des fonctions $f_1, f_2, f_3, f_{10}, f_{20}, f_{30}$.



   a) Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) en décrivant votre démarche.
   b) Démontrer cette conjecture.
   c) En déduire que la suite (I_n) converge.
   d) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x$.
   e) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.