Correction du devoir

Du lundi 22 avril 2024

EXERCICE 1

Calculs d'intégrales **(3 points)**

1) $I = \displaystyle\int_1^3 (t^3 - 2t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^4}{4} - t^2\right]_1^3 = \frac{81}{4} - 9 - \frac{1}{4} + 1 = 12.$

2) $I = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{2}{x+3} - \frac{1}{2x+1}\right)\mathrm{d}x = \left[2\ln(x+3) - \frac{1}{2}\ln(2x+1)\right]_0^1 = 2\ln 4 - \frac{1}{2}\ln 3 - 2\ln 3 + 0$
$= 4\ln 2 - \dfrac{5}{2}\ln 3.$

3) $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$, on pose $\left|\begin{array}{ll} u(x) = \ln x & u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v'(x) = \dfrac{1}{x^2} & v(x) = -\dfrac{1}{x}\end{array}\right.$

$$I = \left[-\frac{\ln x}{x}\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{1}{x^2\,\mathrm{d}x} = -\frac{1}{2}\ln 2 + 0 + \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = -\frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}(1 - \ln 2)$$

EXERCICE 2

Vrai-Faux **(3 points)**

1) **Proposition 1 : fausse** :
Les solutions de (E) sont de la forme : $y(x) = k\,\mathrm{e}^{-2x} + 2$, $k \in \mathbb{R}$.
$y(0) = 0 \Leftrightarrow k + 2 = 0 \Leftrightarrow k = -2$. La solution cherchée est $f(x) = -2\,\mathrm{e}^{-2x} + 2$.
La courbe $\mathscr{C}_1$ est à écarter car ne passe pas par O.
$f(2) = -2\,\mathrm{e}^{-4} + 2 \approx 1,96 \approx 2$.
Des trois autres courbes, seule $\mathscr{C}_3$ passe par un point proche de $(2\,;\,2)$.

2) **Proposition 2 : vraie**
Les solutions non constantes de l'équation sont de la forme : $f(x) = k\,\mathrm{e}^{0,5x} + 4$, $k \neq 0$.
On a alors $f'(x) = 0,5k\,\mathrm{e}^{0,5x} > 0$. La dérivée est strictement positive donc ne s'annule pas et donc $\mathscr{C}_f$ n'admet pas de tangente horizontale.

3) **Proposition 3 : fausse**
Par exemple pour $x \in]1\,;\,2[$, $t < 2 \overset{\times -1}{\Rightarrow} -t > 2 \overset{+2}{\Rightarrow} 2 - t > 0 \overset{\times \mathrm{e}^{-t}}{\Rightarrow} (2-t)\,\mathrm{e}^{-t} > 0$.
D'après la positivité de l'intégrale $F(x) > 0$.

EXERCICE 3

Valeur approchée d'une intégrale **(8 points)**

Partie A

1) $f'(x) = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} = \ln x + 1$. Sur $[1\,;\,4]$, $x \geqslant 1 \overset{\ln\nearrow}{\Rightarrow} \ln x \geqslant 0 \overset{+1}{\Rightarrow} \ln x + 1 \geqslant 1 > 0$:

x	1	4
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	-1 $\nearrow$	$8\ln 2 - 1$

2) Sur $[1\,;\,4]$, la fonction f est continue car dérivable, strictement croissante et change de signe car $f(1)=-1$ et $f(4)=8\ln 2-1\approx 4,55$ donc d'après le TVI, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α.

3) Par balayage d'un tableau de valeurs on a $f(1,76)\approx -0,005$ et $f(1,77)\approx +0,010$ donc $1,76<\alpha<1,77$.

4) On obtient le tableau de signe suivant :

x	1		α		4
$f(x)$		$-$	0	$+$	

5) $f(\alpha)=0 \iff \alpha\ln\alpha-1=0 \iff \ln\alpha=\dfrac{1}{\alpha}$.

Partie B

1) $J=\displaystyle\int_\alpha^4 x\ln x\,\mathrm{d}x$, on pose $\left|\begin{array}{ll} u(x)=\ln x & u'(x)=\dfrac{1}{x} \\ v'(x)=x & v(x)=\dfrac{1}{2}x^2 \end{array}\right.$

$$J=\left[\frac{1}{2}x^2\ln x\right]_\alpha^4-\int_\alpha^4\frac{1}{2}x\,\mathrm{d}x=8\ln 4-\frac{1}{2}\alpha^2\ln\alpha-\left[\frac{1}{4}x^2\right]_\alpha^4=16\ln 2-\frac{1}{2}\alpha^2\ln\alpha-4+\frac{1}{4}\alpha^2.$$

2) D'après la linéarité de l'intégrale, on a : $I=J-\displaystyle\int_\alpha^4 1\,\mathrm{d}x=J-\big[x\big]_\alpha^4=J-4+\alpha$.

$$I=16\ln 2-\frac{1}{2}\alpha^2\ln\alpha-4+\frac{1}{4}\alpha^2-4+\alpha\overset{\ln\alpha=1/\alpha}{=}\frac{1}{4}\alpha^2+\alpha-\frac{1}{2}\alpha+16\ln 2-8$$

$$=\frac{\alpha^2}{4}+\frac{\alpha}{2}+16\ln 2-8$$

3) En prenant $\alpha\approx 1,76$, on trouve $I\approx 4,74\approx 4,7$.

Exercice 4

Suite définie par une intégrale **(6 points)**

1) $I_1=\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$, on pose $\left|\begin{array}{ll} u(x)=x & u'(x)=1 \\ v'(x)=\mathrm{e}^{-x} & v(x)=-\mathrm{e}^{-x} \end{array}\right.$

$$I_1=\Big[-x\,\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1+\int_0^1\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-1}+0+\Big[-\mathrm{e}^{-x}\Big]_0^1=-\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{-1}+1=1-2\,e^{-1}.$$

2) a) Comme les fonctions f_k sont positives sur $[0\,;\,1]$, les terme I_k correspondent à l'aire entre la courbe $\mathscr{C}_k$ et l'axe des abscisses. D'après les représentations des fonctions f_k, plus k augmente, plus l'aire entre f_k et l'axe des abscisses diminue. On peut conjecturer que la suite (I_n) est décroissante.

b) $\forall n\in\mathbb{N},\quad I_{n+1}-I_n\overset{\text{linéarité}}{=}\displaystyle\int_0^1(x^{n+1}-x^n)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x^n(x-1)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$

$0\leqslant x\leqslant 1 \iff x^n\geqslant 0,\quad x-1\leqslant 0$ et $\mathrm{e}^{-x}>0 \Rightarrow x^n(x-1)\,\mathrm{e}^{-x}\leqslant 0.$

D'après la positivité de l'intégrale : $\forall n\in\mathbb{N},\quad I_{n+1}-I_n\leqslant 0$ donc (I_n) est décroissante.

c) La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0, d'après le théorème des suites monotones, la suite (I_n) converge.

d) $0\leqslant x\leqslant 1 \Rightarrow -1\leqslant -x\leqslant 0 \overset{\exp\nearrow}{\Rightarrow} 0\leqslant \mathrm{e}^{-1}\leqslant \mathrm{e}^{-x}\leqslant 1 \overset{\times x^n>0}{\Rightarrow} 0\leqslant x^n\,\mathrm{e}^{-x}\leqslant x^n.$

En intégrant l'encadrement sur $[0\,;\,1]$, $\quad\forall n\in\mathbb{N},\quad 0\leqslant I_n\leqslant\displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x.$

e) $\displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0.$

D'après le théorème des gendarmes $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}I_n=0.$