Contrôle de mathématiques

Lundi 29 janvier 2024

EXERCICE 1

QCM **(5 points)**

Cette année, 300 000 étudiants sont en prépa ou en BTS. Parmi eux, on compte 180 000 garçons dont 25 % sont en prépa. Par ailleurs 80 % des filles sont en BTS. On prend au hasard un étudiant et l'on nomme G « l'étudiant est un garçon », F « l'étudiant est une fille », A « l'étudiant est en prépa » et B « l'étudiant est en BTS ».

1) On a alors :
   a) $p(\text{G}) = \dfrac{3}{5}$ b) $p(\text{G}) = \dfrac{1}{6}$ c) $p(\text{F}) = \dfrac{5}{6}$ d) $p(\text{F}) = \dfrac{2}{3}$

2) La probabilité de l'événement « l'étudiant est un garçon en prépa » est égale à :
   a) $\dfrac{3}{20}$ b) $\dfrac{5}{12}$ c) $\dfrac{1}{4}$ d) $\dfrac{1}{5}$

3) Quelle(s) sont les probabilité(s) exactes(s) ? ⚠ *plusieurs réponses sont possibles*
   a) $p_{\text{A}}(\text{G}) = \dfrac{15}{23}$ b) $p_{\text{G}}(\text{A}) = \dfrac{15}{23}$ c) $p_{\text{B}}(\text{F}) = \dfrac{32}{77}$ d) $p_{\text{F}}(\text{B}) = \dfrac{15}{23}$

On veut tester des machines. On choisit au hasard et de façon indépendante n machines. On assimile ce choix à un tirage avec remise, et on désigne par X la variable aléatoire qui associe à chaque lot de n machines le nombre de machines défectueuses dans ce lot.
On admet que X suit la loi binomiale de paramètres n et $p = 0,082$.

4) Dans cette question, on prend $n = 50$.
   La valeur de la probabilité $p(X > 2)$, arrondie au millième, est de :
   a) 0,136 b) 0,789 c) 0,864 d) 0,924

5) On considère un entier n pour lequel la probabilité que toutes les machines d'un lot de taille n fonctionnent correctement est supérieure à $0,4$.
   La plus grande valeur possible pour n est égale à :
   a) 5 b) 6 c) 10 d) 11

EXERCICE 2

Divers **(5 points)**

Dans cet exercice les résultats seront donnés à 10^{-3} près.

1) On donne la loi de probabilité de X :
   a) Déterminer $p(X = 1)$.
   b) Calculer $\text{E}(X)$, $\text{V}(X)$ et $\sigma(X)$

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	0,100		0,402	0,073

2) On réalise une enquête sur les allergies dans une ville en interrogeant 150 habitants choisis au hasard, et on admet que ce choix se ramène à des tirages successifs indépendants avec remise. On sait que la probabilité qu'un habitant choisi au hasard dans cette ville soit allergique est égale à 0,08.
   On note Y la variable aléatoire qui à un échantillon de 150 habitants choisis au hasard associe le nombre de personnes allergiques dans cet échantillon.

a) Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire Y ?

b) Déterminer la probabilité que 20 personnes exactement parmi les 150 interrogées soient allergiques.

c) Déterminer la probabilité qu'au moins 10 % des personnes parmi les 150 interrogées soient allergiques.

Exercice 3

Accouchements **(10 points)**

En France, entre 1998 et 2020, il y a eu 18 221 965 accouchements, dont 293 898 ont donné naissance à des jumeaux et 4 921 ont donné naissance à au moins trois enfants.

1) a) Avec une précision de 0,1 % calculer parmi tous les accouchements de la période 1998-2020, le pourcentage d'accouchements donnant naissance à des jumeaux.

b) Vérifier que le pourcentage d'accouchements qui ont donné naissance à au moins trois enfants est inférieur à 0,1 %.

On considérera dans la suite ce pourcentage négligeable.

- On appelle accouchement ordinaire, un accouchement donnant naissance à un enfant.
- On appelle accouchement double, un accouchement donnant naissance à des jumeaux.

Les probabilités calculées dans la suite seront arrondies au **millième**.

2) On admet qu'un jour donné dans une maternité, on réalise n accouchements.

On considère que ces n accouchements sont indépendants les uns des autres.

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre d'accouchements doubles du jour.

a) Pour $n = 20$, montrer que X suit une loi binomiale puis calculer la probabilité qu'on réalise exactement un accouchement double.

b) Déterminer la plus petite valeur de n telle que $p(X \geqslant 1) \geqslant 0,99$.

Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

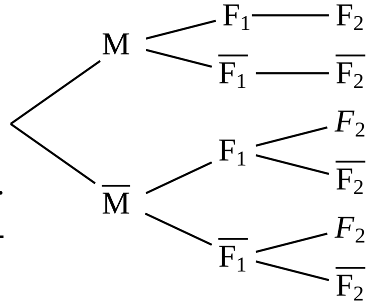
3) Dans cette maternité, parmi les naissances double, on estime qu'il y a 30 % de jumeaux monozygotes (appelés « vrais jumeaux » qui sont obligatoirement de même sexe) et donc 70 % de jumeaux dizygotes (appelés « faux jumeaux », qui peuvent être de sexes différents).

Dans le cas de naissances doubles, on admet que, comme pour les naissances ordinaires, la probabilité d'être une fille à la naissance est égale à $0,49$ et que celle d'être un garçon à la naissance est égale à $0,51$.

Dans le cas d'une naissance double de jumeaux dizygotes, on admet aussi que le sexe du second nouveau-né des jumeaux est indépendant du sexe du premier nouveau-né.

On choisit au hasard un accouchement double réalisé dans cette maternité et on considère les évènements suivants :

- M : « les jumeaux sont monozygotes » ;
- F_1 : « le premier nouveau-né est une fille » ;
- F_2 : « le second nouveau-né est une fille ».



a) Recopier puis compléter l'arbre pondéré ci-contre.

b) Montrer que la probabilité que les deux nouveaux-nés soient des filles est 0,315 07.

c) Les deux nouveaux-nés sont des jumelles. Calculer la probabilité qu'elles soient monozygotes.