

Contrôle de mathématiques

Mercredi 15 octobre 2025

EXERCICE 1

Récurrence

(3 points)

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n} \end{cases}$$

- 1) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2}{2n+1}$.
- 2) La suite (u_n) converge-t-elle ? Justifier.

EXERCICE 2

Vrai-Faux

(5 points)

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point

- 1) Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_n = \frac{n}{2 + \cos n}$.

Proposition 1 : La suite (v_n) diverge vers $+\infty$

- 2) Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \frac{1 + 5^n}{2 + 3^n}$.

Proposition 2 : La suite (v_n) converge vers $\frac{5}{3}$

- 3) Soit la suite (w_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $w_0 = 0$ et $w_{n+1} = 3w_n - 2n + 3$.

Proposition 3 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $w_n \geq n$

EXERCICE 3

Suite récurrente à deux termes

(10 points)

Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 0, \quad u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n \end{cases}$$

Partie A : Conjecture

- 1) Recopier et compléter le tableau ci-dessous. Aucune justification n'est demandée.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	0	$\frac{1}{2}$				

- 2) Conjecturer la limite de la suite (u_n) .

On pourra s'aider de la calculatrice en calculant u_{15} .

Partie B : Étude d'une suite auxiliaire

Soit (w_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $w_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$.

- 1) Calculer w_0 .
- 2) Démontrer que la suite (w_n) est géométrique dont on précisera la raison.
- 3) Pour tout entier naturel n , exprimer w_n en fonction de n .
- 4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{2}u_n$.
- 5) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Partie C : Étude de la suite (u_n)

- 1) Montrer que la suite (u_n) est décroissante à partir du rang $n = 1$.
- 2) En déduire que la suite (u_n) est convergente sans chercher à calculer la valeur de la limite.
- 3) On admet que la limite ℓ de la suite (u_n) est solution de l'équation : $\ell = \ell - \frac{1}{4}\ell$.
Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n) .

EXERCICE 4

Posidonie

(2 points)

Une équipe de biologistes étudie l'évolution de la superficie recouverte par une algue marine appelée posidonie, sur le fond de la baie de l'Alycastre, près de l'île de Porquerolles.

La zone étudiée est d'une superficie totale de 20 hectares (ha), et au premier juillet 2024, la posidonie recouvrait 1 ha de cette zone.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note u_n , la superficie de la zone, en hectare, recouverte par la posidonie au premier juillet de l'année $2024 + n$. Ainsi, $u_0 = 1$.

Une étude conduite sur cette superficie a permis d'établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = -0,02u_n^2 + 1,3u_n.$$

On peut alors montrer que la suite (u_n) est croissante et majorée par 20.

- 1) Proposer un programme en langage Python, permettant de déterminer le nombre d'années nécessaires pour que la surface recouverte par la posidonie dépasse 14 hectares.
- 2) En quelle année, au premier juillet, cela se produira-t-il ?