Contrôle de mathématiques

Mercredi 17 décembre 2025

Exercice 1

Vrai-Faux **(5 points)**

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse. Un réponse non justifiée ne rapporte aucun point

1) Soit la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = \ln\left(e^{\frac{x}{2}} + 2\right)$

   Proposition 1 : La courbe $\mathscr{C}_{f_1}$ de la fonction f_1 passe par le point $A(2\ln 2\,;\,2\ln 2)$.

2) Soit la fonction f_2 définie sur $]2\,;+\infty[$ par $f_2(x) = x\ln(x-2)$.

   Proposition 2 : $\displaystyle\lim_{x\to 2^+} f_2(x) = 0$

3) Soit la fonction f_3 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_3(x) = \dfrac{x}{e^x} + 2x - 1$.

   Proposition 3 : $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f_3(x) = +\infty$

4) Soit la fonction f_4 définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f_4(x) = \dfrac{\ln x}{x^2} + 1$

   Proposition 4 : f_4 est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et $f_4'(x) = \dfrac{1-2\ln x}{x^3}$

5) Soit $f_5(x) = \ln(3x+1) + 8$ et la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 25 \\ u_{n+1} = f_5(u_n) \end{cases}$

   Proposition 5 : La suite (u_n) est décroissante.

Exercice 2

Équations **(5 points)**

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 1$
   a) Vérifier que $f(1) = 0$ puis en déduire une factorisation de $f(x)$.
   b) Résoudre alors $f(x) = 0$.
2) Soit l'équation (E) : $\ln(x^2-1) + \ln(x-2) = 2\ln(x-1)$
   a) Déterminer l'ensemble de définition de l'équation (E).
   b) À l'aide de la question 1), résoudre l'équation (E).
3) Déterminer algébriquement le plus petit entier n tel que $1 - \left(\dfrac{4}{5}\right)^n > 0{,}95$

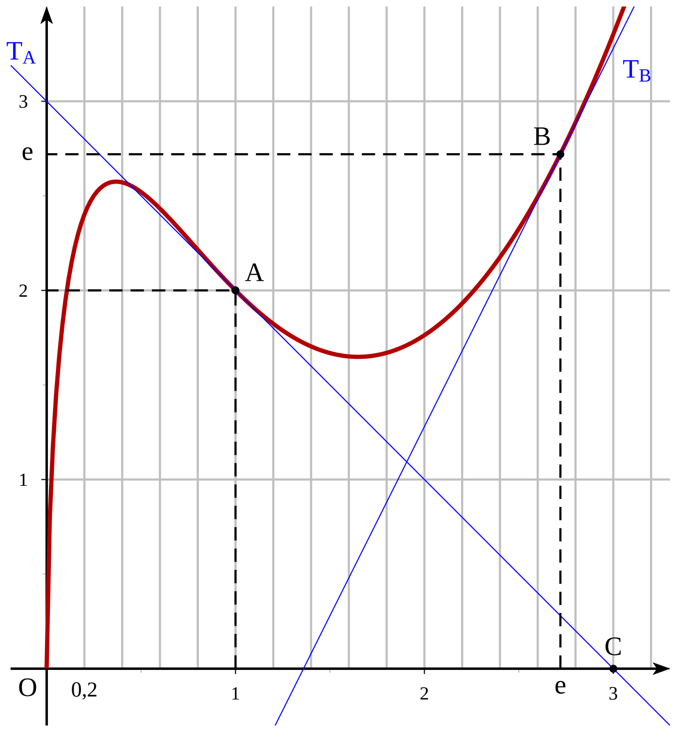
EXERCICE 3

Sujet bac **(10 points)**

Soit une fonction f définie et deux fois dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

Dans un repère orthogonal, on a tracé ci-dessous :

- la courbe représentative de f, notée $\mathscr{C}_f$ sur l'intervalle $]0\ ;3]$;
- la droite T_A,tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $A(1\ ;2)$ passant par le point $C(3\ ;0)$;
- la droite T_B tangente à $\mathscr{C}_f$ au point $B(e\ ;e)$.



Partie A : Lectures graphiques

Répondre aux questions suivantes **en les justifiant** à l'aide du graphique.

1) Déterminer le nombre dérivé $f'(1)$.
2) Combien de solutions l'équation $f'(x) = 0$ admet-elle dans l'intervalle $]0\,;3]$?
3) Quel est le signe de $f''(0,2)$?

Partie B : étude de la fonction f

La fonction f est définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = x\left(2\ln^2 x - 3\ln x + 2\right)$

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2X^2 - 3X + 2 = 0$.
   En déduire que $\mathscr{C}_f$ ne coupe pas l'axe des abscisses.
2) Déterminer, en justifiant, la limite de f en $+\infty$. On admet que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$.
3) a) Montrer que pour $x \in]0\,;+\infty[$: $f'(x) = 2\ln^2 x + \ln x - 1$.
   b) Déterminer l'équation de la tangente T_B.
   c) Montrer que pour tout $x \in]0\,;+\infty[$: $f''(x) = \dfrac{1}{x}(4\ln x + 1)$.
   d) Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ et préciser la valeur exacte de l'abscisse du point d'inflexion.
   e) Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de la tangente T_B sur l'intervalle $]1\,;+\infty[$.