Contrôle de mathématiques

Mercredi 08 avril 2026

EXERCICE 1

Vrai-Faux **(5 points)**

Pour chacune des cinq affirmations suivantes, dites si elle est vraie ou fausse en vous justifiant. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1) Soit la fonction f définie sur $]2\,;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{4x^2 - 7x + 1}{x - 2}$.

   Affirmation 1 : « La fonction F définie sur $]2\,;+\infty[$ par $F(x) = 2x^2 + x + 3\ln(x-2) + 5$ est une primitive de f ».

2) Soit la fonction f définie sur $]-1\,;1[$ par : $f(x) = \dfrac{x}{1 - x^2}$.

   Affirmation 2 : « $F(x) = \dfrac{1 + x^2}{(1 - x^2)^2}$ est une primitive de la fonction f ».

3) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x\mathrm{e}^{-x^2}$

   Affirmation 3 : « Il n'existe pas de primitive de f s'annulant en 0 ».

4) Soit l'équation différentielle (E) : $y' - \dfrac{1}{2}y = 4$

   Affirmation 4 : « Les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} - 8$, avec $k \in \mathbb{R}$, sont solutions de (E) ».

5) Soit l'équation différentielle (E) : $-2y' + 3y = \sin x + 8\cos x$

   Affirmation 5 : « La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\cos x - \sin x$ est solution de (E) ».

EXERCICE 2

Primitives **(4 points)**

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{1 + \mathrm{e}^{-0,2x}}$

   a) Montrer que $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{0,2x}}{1 + \mathrm{e}^{0,2x}}$

   b) En déduire la primitive F de f définie sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$

2) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (-x^2 - x + 1)\,\mathrm{e}^{-x}$

   a) Déterminer les réels a, b et c pour que la fonction h telle que $h(x) = (ax^2 + bx + c)\,\mathrm{e}^{-x}$ soit une primitive de la fonction g.

   b) Déterminer la primitive G de g telle que $G(0) = 1$.

EXERCICE 3

Équation différentielle **(4 points)**

Soit l'équation différentielle (E) : $y + y' = (2x+3)\mathrm{e}^{-x}$.

1) Montrer que la fonction p définie sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = (x^2 + 3x)\,\mathrm{e}^{-x}$ est une solution particulière de l'équation (E).
2) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).
3) Déterminer la fonction g solution de (E) qui vérifie : $g(0) = 1$.
4) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) dont la courbe admet exactement deux points d'inflexion.

EXERCICE 4

Population de bactéries **(7 points)**

Partie A

Soit l'équation différentielle : (E_1) : $y' + 0,48y = \dfrac{1}{250}$.

où y est une fonction de la variable t appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$.

1) On considère la fonction constante h définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par $h(t) = \dfrac{1}{120}$.

   Montrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle (E_1).
2) Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle : $y' + 0,48y = 0$.
3) Donner alors l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E_1).

Partie B

On s'intéresse à présent à l'évolution d'une population de bactéries dans un milieu.

À $t = 0$, on introduit une population initiale de 30 000 bactéries dans le milieu.

On note $p(t)$ la quantité de bactéries, exprimée en millier d'individus, présente dans le milieu après un temps t, exprimé en heure. On a donc $p(0) = 30$.

On admet que la fonction p dérivable et strictement positive sur $[0\,;+\infty[$ est solution de l'équation différentielle (E_2) : $p' = \dfrac{1}{250}\,p\,(120 - p)$

Soit y la fonction strictement positive sur $[0\,;+\infty[$ telle que $y(t) = \dfrac{1}{p(t)}$ pour $t \in [0\,;+\infty[$.

1) Montrer que si p est solution de l'équation différentielle (E_2), alors y est solution de l'équation différentielle (E_1) : $y' + 0,48y = \dfrac{1}{250}$.
2) On admet réciproquement que, si y est une solution strictement positive de l'équation différentielle (E_1), alors $p = \dfrac{1}{y}$ est solution de l'équation différentielle (E_2).

   Montrer que, pour tout t appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$, on a :
   $$p(t) = \frac{120}{1 + K\mathrm{e}^{-0,48t}} \text{ avec } K \text{ une constante réelle.}$$
3) En utilisant la condition initiale, déterminer la valeur de K.
4) Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} p(t)$. En donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.
5) Déterminer le temps nécessaire pour que la population de bactéries dépasse 60 000 individus.

   On donnera le résultat sous la forme d'une valeur arrondie en heures et minutes.