Devoir de mathématiques

À faire pour le lundi 04 mai 2026 (non noté)

EXERCICE 1

Calculs d'intégrales

Calculer les intégrales suivantes :

1) $I = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{2}{x+3} - \frac{1}{2x+1}\right) \mathrm{d}x.$ 2) $I = \displaystyle\int_0^{50} \left(\mathrm{e}^{-0,02t} + 30\right) \mathrm{d}t.$

3) $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} \mathrm{d}x$, on pourra faire une intégration par parties.

4) Soit $F(x) = \displaystyle\int_1^x (2-t)\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$

L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse. On se justifiera.

« $F(x)$ est négatif ou nul pour tout réel $x > 1$. »

EXERCICE 2

Intégrale et suite

La suite (I_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $I_n = \displaystyle\int_0^1 (1+t^n)\,\mathrm{d}t$

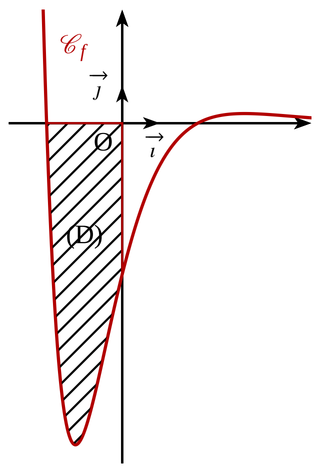
1) Prouver que la suite (I_n) est décroissante.
2) Est-elle convergente ?

EXERCICE 3

Aire

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2-4)\,\mathrm{e}^{-x}$.

1) Déterminer le signe sur $\mathbb{R}$ de la fonction f
2) Soit la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $I_n = \displaystyle\int_{-2}^0 x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$
   a) Justifier que $I_0 = \mathrm{e}^2 - 1$.
   b) Par une intégration par parties, démontrer l'égalité : $I_{n+1} = (-2)^{n+1}\,\mathrm{e}^2 + (n+1)I_n$.
   c) En déduire les valeurs exactes de I_1 et de I_2.
3) On a représenté ci-contre la courbe $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.
   Le domaine (D) du plan hachuré ci-contre est délimité par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.
   À l'aide de la question 2), calculer la valeur exacte, en unité d'aire, de l'aire S du domaine (D).



EXERCICE 4

Valeur approchée d'une intégrale

Partie A

Soit la fonction f définie sur $[1\,;\,4]$ par : $f(x) = x\ln x - 1$.

1) Calculer $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de f sur $[1\,;\,4]$.
2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[1\,;\,4]$.
3) Déterminer un encadrement de α à 10^{-2}.
4) En déduire le signe de f sur $[1\,;\,4]$.
5) Montrer que $\ln\alpha = \dfrac{1}{\alpha}$.

Partie B

Soit l'intégrale $I = \displaystyle\int_\alpha^4 (x\ln x - 1)\,\mathrm{d}x$, où α est la valeur définie à la partie A.

1) À l'aide d'une intégration par parties, calculer $J = \displaystyle\int_\alpha^4 x\ln x\,\mathrm{d}x$.
2) Montrer que $I = \dfrac{\alpha^2}{4} + \dfrac{\alpha}{2} + 16\ln 2 - 8$.
3) En déduire une valeur approchée à 10^{-1} de I.