BACCALAURÉAT GENERAL

DE MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 HEURES
Les calculatrices sont AUTORISÉES en mode examen actif

Coefficient : 16

Le candidat doit traiter les quatre exercices proposés.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

EXERCICE 1 **(5 points)**

Un navire assure la liaison entre deux ports de la Méditerranée. Lors d'une traversée, une famille a la possibilité de réserver une cabine ainsi qu'un emplacement pour un véhicule.

Partie A

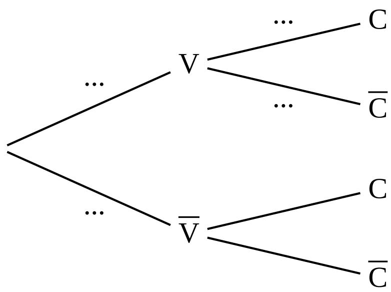
Parmi l'ensemble des familles effectuant la traversée, on constate que 30 % réservent un emplacement pour un véhicule et, parmi ces dernières, 80 % réservent une cabine.
On sait par ailleurs que 75 % des familles effectuant la traversée réservent une cabine.

On choisit au hasard une famille effectuant la traversée, et on considère les événements suivants :

- V : « la famille réserve un emplacement pour un véhicule » ;
- C : « la famille réserve une cabine ».

1) Donner $P(\mathrm{C})$.

2) Reproduire l'arbre suivant et compléter les pointillés :



3) Calculer la probabilité qu'une famille réserve un emplacement pour un véhicule et une cabine.

4) Une famille a réservé une cabine. Déterminer la probabilité qu'elle réserve un emplacement pour un véhicule.

5) Déterminer $P_{\overline{\mathrm{V}}}(\mathrm{C})$. On arrondira le résultat à 10^{-2}.
Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Sur ce trajet, la réservation d'une cabine et d'un emplacement pour un véhicule sont facturés en supplément du coût de la traversée.

Ces suppléments sont d'un montant de :

- 100 € pour une cabine ;
- 70 € pour l'emplacement d'un véhicule.

On suppose qu'une famille peut réserver au maximum une cabine et au maximum un emplacement pour un véhicule.
À ces suppléments peuvent s'ajouter le prix payé pour des extras (repas, boissons, etc.).

On note X la variable aléatoire qui associe, à chaque famille effectuant la traversée, le prix qu'elle paie, en euro, pour les suppléments.

x_i	0	70	100	170
$P(X = x_i)$	0,19	0,06	0,51	0,24

On note Y la variable aléatoire qui associe, à chaque famille effectuant la traversée, le prix qu'elle paie, en euro, pour les extras.
On admet que la variable aléatoire Y a pour espérance $\mathrm{E}(Y) = 104$ et pour variance $\mathrm{V}(Y) = 1\,686$.

On suppose que les variables X et Y sont indépendantes.

1) Justifier que $\mathrm{E}(X) = 96$ et que $\mathrm{V}(Y) = 3\,114$.

2) A titre exceptionnel, la compagnie propose une remise de 40 % sur les suppléments et les extras.

   On note Z la variable aléatoire qui, à chaque famille effectuant la traversée, associe le montant total pour les suppléments et les extras, en euro, payé par cette famille après réduction.

   a) Justifier que $Z = 0,6(X+Y)$.

   b) En déduire que $\mathrm{E}(Z) = 120$ et que $\mathrm{V}(Z) = 1\,728$.

3) On note n un entier naturel non nul et on choisit au hasard un échantillon de n familles effectuant cette traversée bénéficiant de la réduction exceptionnelle définie en question 2.

   On admet que ce choix peut être assimilé à un tirage avec remise.

   On désigne par Z_1 la variable aléatoire égale au prix total pour les suppléments et les extras payé par la première famille, Z_2 la variable aléatoire égale au prix total pour les suppléments et les extras payé par la deuxième famille et ainsi de suite, Z_n la variable aléatoire égale au prix total pour les suppléments et les extras payé par la n-ième famille.

   On considère la variable aléatoire $M_n = \dfrac{Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n}{n}$ donnant le prix total moyen pour les suppléments et les extras, payé par ces familles.

   On admet que les variables $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ sont indépendantes et suivent la même loi de probabilité que la variable aléatoire Z.

   a) Montrer que l'espérance $\mathrm{E}(M_n)$ de la variable M_n est égale à 120, et que sa variance $\mathrm{V}(M_n)$ est égale à $\dfrac{1728}{n}$.

   b) Déterminer le plus petit entier n pour lequel l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev permet d'affirmer que $P(114 < M_n < 126) \geqslant 0,85$.
   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 2 **(4 points)**

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1) L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$. On considère :

   - la droite (d) dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = t \\ y = -1,5 - t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$
   - les points A(3 ; 0 ; 2) et B(2 ; 1 ; −3) ;
   - le plan (P) d'équation : $-x + y - 5z - 0,5 = 0$.

   a) **Affirmation 1** : Le plan (P) est orthogonal à la droite (AB), et passe par le milieu du segment [AB].

   b) **Affirmation 2** : Les droites (d) et (AB) sont sécantes.

   c) On considère le point C de coordonnées (1,5 ; -3 ; -1).
   Affirmation 3 : La mesure de l'angle $\widehat{\mathrm{ACB}}$, arrondie à 10^{-1}, est égale à 70,5°.

2) Titouan et Clotilde participent à un escape game. Ils se retrouvent dans une salle possédant deux portes de sortie, A et B, chacune protégée par un digicode équipé de 8 touches portant des symboles différents :
   - le digicode de la porte A utilise un code de 3 symboles différents devant être saisis dans l'ordre ;
   - celui de la porte B utilise un code de 4 symboles différents qui peuvent être saisis dans n'importe quel ordre.

   N'étant pas parvenus à obtenir d'indices, ils décident de procéder au hasard à la saisie des codes. Clotilde choisit un code pour la porte A, et Titouan choisit un code pour la porte B.

   On considère que les choix des codes sont équiprobables.

   Affirmation 4 : Titouan a plus de chances d'ouvrir sa porte que Clotilde.

Exercice 3 (6 points)

On étudie le fonctionnement d'un système de chauffage installé dans une pièce.

Ce système se déclenche automatiquement dès que la température de la pièce est inférieure ou égale à 18°C (degrés Celsius), et s'éteint lorsqu'elle atteint 20°C.

Partie A : Phase de chauffage

Pour une température de la pièce variant de 18°C à 20°C, le système de chauffage fonctionne en continu. La température de la pièce augmente progressivement.

Dans cette partie, on modélise la température de la pièce, en degré Celsius, à l'instant t, exprimé en dizaines de minutes, par une fonction T définie sur $[0\,;+\infty[$.

On admet que la fonction T est :

- dérivable sur $[0\,;+\infty[$;
- solution de l'équation différentielle (E) : $y' = -0,035y + 0,91$ où y est une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $[0\,;+\infty[$.

On note T' la fonction dérivée de la fonction T.

On suppose qu'au début de l'étude, la température de la pièce est de 18° C. Ainsi $T(0) = 18$.

1) Donner les solutions de l'équation différentielle (E) sur $[0\,;+\infty[$.
2) En déduire que pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0\,;+\infty[$, on a :
$$T(t) = 26 - 8\mathrm{e}^{-0,035t}$$
3) Selon ce modèle, déterminer au bout de combien de temps la pièce atteindra la température de 20° C. On exprimera le résultat en heures et minutes arrondi à la minute.
4) Si une panne du système de chauffage l'empêche de s'éteindre lorsque la température de la pièce atteint 20° C, la température de la pièce pourra-t-elle dépasser 28° C selon ce modèle ? Justifier.

Partie B : Phase de refroidissement

Lorsque la pièce atteint la température de 20° C, le système de chauffage s'éteint et la pièce refroidit.
On modélise la température de la pièce par la suite (u_n) définie par $u_0 = 20$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$u_{n+1} = 0,965u_n + 0,35 + 0,07\mathrm{e}^{-0,1n}$$
où n est un nombre entier exprimant le temps écoulé en dizaines de minutes.

1) Montrer que $u_1 = 19,72$.
2) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n > 10$.

On admet que la suite (u_n) est décroissante.

3) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4) On note ℓ la limite de la suite (u_n).

   a) Justifier que cette limite est solution de l'équation $x = 0,965x + 0,35$.

   b) Déterminer ℓ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

5) On rappelle que le système de chauffage se met en marche automatiquement dès que la température de la pièce, est inférieure ou égale à 18° C.

   a) Recopier et compléter les lignes 4, 5 et 6 du programme écrit en langage Python ci-dessous, afin qu'il renvoie le nombre de dizaines de minutes à partir duquel le système de chauffage se remettra en marche.

```
  from math import*
1 def marche() :
2     n=0
3     u=20
4     while ... :
5         u=...
6         n=...
7     return n
```

   b) Déterminer le temps, en dizaines de minutes, à partir duquel le système de chauffage se remettra en marche.

EXERCICE 4 (5 points)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-1\,;+\infty[$ par :

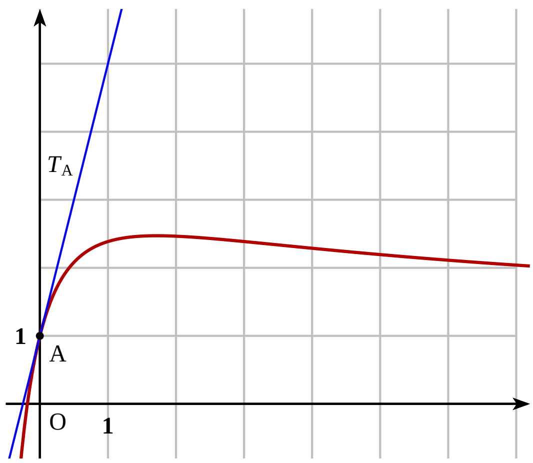
$$f(x) = a + \frac{b\ln(x+1)}{x+1},$$

où a et b sont des réels, et ln désigne la fonction logarithme népérien.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]-1\,;+\infty[$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa fonction dérivée seconde.

Partie A

L'objectif de cette partie est de déterminer les valeurs de a et b de sorte que la courbe représentative de la fonction f sur $[0\ +\infty[$ corresponde à celle tracée dans le repère orthonormé ci-dessous :



La droite T_A est la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point A(0 ; 1).

1) Justifier que $a = 1$.

2) En utilisant le graphique :
   a) Donner la valeur de $f'(0)$. Justifier.
   b) Donner le signe de $f''(1)$. Justifier.
3) a) Montrer que pour tout réel x appartenant à $]-1\,;+\infty[$, on a :
$$f'(x) = \frac{b[1-\ln(x+1)]}{(x+1)^2}.$$
   b) En déduire la valeur de b.

Partie B

On admet dans la suite de l'exercice que la fonction f est définie sur $]-1\,;\infty[$ par :
$$f(x) = 1 + \frac{4\ln(x+1)}{x+1}.$$

1) Justifier que la droite $y = 1$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction f.
2) Résoudre l'inéquation $1 - \ln(x+1) > 0$ sur $]-1\,;+\infty[$.
3) On admet que $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty$.
   Dresser le tableau de variation complet de la fonction f en indiquant la valeur exacte de son extremum. Justifier.
4) Montrer que l'équation $f(x) = 1,5$ admet une unique solution dans l'intervalle $[2\,;+\infty[$. En donner une valeur arrondie à 10^{-1}.
5) a) Montrer que : $\displaystyle\int_0^2 \frac{\ln(x+1)}{x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln^2 3$.
   b) En déduire l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 2$.