PGCD et PPCM
Théorèmes de Bezout et Gauss

PGCD - Algorithme d'Euclide - PPCM

EXERCICE 1

Utiliser l'algorithme d'Euclide pour trouver le pgcd des nombres suivants :

a) 144 et 840 b) 202 et 138 c) 441 et 777 d) 2004 et 9185

EXERCICE 2

Les entiers suivants sont-ils premiers entre eux ?

a) 4847 et 5633 b) 5617 et 813

EXERCICE 3

Déterminer tous les entiers naturels n inférieurs à 200 tels que : $\operatorname{pgcd}(n, 324) = 12$

EXERCICE 4

Si on divise 4294 et 3521 par un même entier positif, on obtient respectivement 10 et 11 comme reste. Quel est cet entier ?

EXERCICE 5

Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ les systèmes suivants. On posera $d = \operatorname{pgcd}(x, y)$ et $m = \operatorname{ppcm}(x, y)$ et on donnera la réponse sous forme d'un tableau.

a) $\begin{cases} xy = 1512 \\ \operatorname{ppcm}(x, y) = 252 \end{cases}$ b) $\begin{cases} xy = 300 \\ \operatorname{ppcm}(x, y) = 60 \end{cases}$

EXERCICE 6

Déterminer tous les couples $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ dont $m = \operatorname{ppcm}(a, b)$ et $d == \operatorname{pgcd}(a, b)$ vérifient la relation :

$$8m = 105d + 30$$

EXERCICE 7

n est un entier relatif quelconque. On pose :

$$A = n - 1 \quad \text{et} \quad B = n^2 - 3n + 6$$

1) a) Démontrer que le pgcd de A et de B est égal au pgcd de A et de 4.
   b) Déterminer, selon les valeurs de l'entier n, le pgcd de A et de B.

2) Pour quelles valeurs de l'entier relatif n, $n \neq 1$, $\dfrac{n^2 - 3n + 6}{n - 1}$ est-il un entier relatif ?

Théorème de Bézout

Exercice 8

1) n est un entier naturel , $a = 7n + 4$ et $b = 5n + 3$
   Montrer, pour tout n, que a et b sont premiers entre eux

2) Montrer que deux entiers naturels consécutifs non nuls sont premiers entre eux.

3) Prouver que la fraction $\dfrac{n}{2n+1}$ est irréductible pour tout entier naturel n.

Exercice 9

Pour tout entier naturel, n supérieur ou égal à 5, on considère les nombres :

$$a = n^3 - n^2 - 12n \quad \text{et} \quad b = 2n^2 - 7n - 4$$

1) Démontrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisible par $n - 4$.
2) On pose $\alpha = 2n + 1$ et $\beta = n + 3$. On note d le pgcd(α, β).
   a) Trouver une relation entre α et β indépendante de n.
   b) Démontrer que d est un diviseur de 5.
   c) Démontrer que les nombres α et β sont multiples de 5 si et seulement si $n - 2$ est multiple de 5.

3) Démontrer que $2n + 1$ et n sont premier entre eux.

4) a) Déterminer, suivant les valeur de n et en fonction de n, le pgcd(a, b).
   b) Vérifier les résultats obtenus dans les cas particuliers $n = 11$ et $n = 12$.

Équations diophantiennes

Exercice 10

Soit l'équation $4x - 3y = 2$.

a) Déterminer une solution particulière entière à cette équation.

b) Déterminer l'ensemble des solutions entières.

Exercice 11

Soit l'équation $3x - 4y = 6$.

a) Déterminer une solution particulière entière à cette équation.

b) Déterminer l'ensemble des solutions entières.

Exercice 12

Soit l'équation $5x + 8y = 2$.

a) Déterminer une solution particulière entière à cette équation.

b) Déterminer l'ensemble des solutions entières.

EXERCICE 13

Soit l'équation $13x - 23y = 1$.

a) Déterminer une solution particulière entière à l'aide de l'algorithme d'Euclide à cette équation.

b) Déterminer l'ensemble des solutions entières.

EXERCICE 14

1) Démontrer que pour tout entier relatif n, les entiers $14n + 3$ et $5n + 1$ sont premiers entre eux.

2) On considère l'équation : (E) $\quad 87x + 31y = 2$

   a) Vérifier, à l'aide de la première question que 87 et 31 sont premiers entre eux.

   b) En déduire un couple $(u\ ,\ v)$ d'entiers relatifs tels que $87u + 31v = 1$ puis un couple $(x_0\ ,\ y_0)$ solution de (E).

   c) Déterminer l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{Z}^2$.

3) **Application.** Trouver les points de la droite d'équation $87x - 31y - 2 = 0$ dont les coordonnées sont des entiers naturels et dont l'abscisse est comprise entre 0 et 10

EXERCICE 15

Un astronome a observé au jour J_0 le corps céleste A, qui apparaît périodiquement tous les 105 jours. Six jours plus tard ($J_0 + 6$), il observe le corps B, dont la période d'apparition est de 81 jours. On appelle J_1 le jour de la prochaine apparition simultanée des deux objets aux yeux de l'astronome.
Le but de cet exercice est de déterminer la date de ce jour J_1.

1) Soient u et v le nombre de périodes effectuées respectivement par A et B entre J_0 et J_1. Montrer que le couple $(u\ ;\ v)$ est solution de l'équation (E_1) : $\quad 35x - 27y = 2$.

2) a) Déterminer un couple de relatifs $(x_0\ ,\ y_0)$ solution particulière de l'équation (E_2) :
$$35x - 27y = 1$$

   b) En déduire une solution particulière $(u_0\ ;\ v_0)$ de (E_1).

   c) Déterminer toutes les solutions de l'équation (E_1).

   d) Déterminer la solution $(u\ ;\ v)$ permettant de déterminer J_1.

3) a) Combien de jours s'écouleront entre J_0 et J_1 ?

   b) Le jour J_0 était le mardi 7 décembre 1999, quelle est la date exacte du jour J_1 ? (L'année 2000 était bissextile.)

   c) Si l'astronome manque ce futur rendez-vous, combien de jours devra t-il attendre jusqu'à la prochaine conjonction des deux astres ?

EXERCICE 16

Antilles-Guyane juin 2014

En montagne, un randonneur a effectué des réservation dans deux types d'hébergement : L'hébergement A et l'hébergement B.

Une nuit en hébergement A coûte 24 € et une nuit en hébergement B coûte 45 €.
Il se rappelle que le coût total de sa réservation est de 438 €.

On souhaite retrouver les nombres x et y de nuitées passées respectivement en hébergement A et en hébergement B

1) a) Montrer que les nombres x et y sont respectivement inférieurs ou égaux à 18 et 9.

   b) Recopier et compléter pointillés de l'algorithme suivant afin qu'il affiche les couples $(x\,,\,y)$ possibles.

Variables : x, y entiers

Traitement

```
pour x variant de 0 à ...... faire
    pour y variant de 0 à ...... faire
        si ......... alors
            | Afficher x et y
        fin
    fin
fin
```

2) Justifier que le coût total de la réservation est un multiple de 3.

3) a) Justifier que l'équation $8x + 15y = 1$ admet pour solution au moins un couple d'entiers relatifs.

   b) Déterminer une telle solution.

   c) Résoudre l'équation (E) : $8x+15y = 146$ où x et y sont des nombres entiers relatifs.

4) Le randonneur se souvient avoir passé au maximum 13 nuits en hébergement A.
   Montrer alors qu'il peut retrouver le nombre exact de nuits passées en hébergement A et celui des nuits passées en hébergement B.
   Calculer ces nombres.

EXERCICE 17

Métropole juin 2011

Partie A - Restitution organisée de connaissances

On rappelle ci-dessous le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.

Théorème de Bézout :
Deux entiers relatifs a et b sont premiers entre eux si et seulement si, il existe un couple (u, v) d'entiers relatifs vérifiant $au + bv = 1$.

Théorème de Gauss :
Soient a, b, c des entiers relatifs.
Si a divise le produit bc et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c.

1) En utilisant le théorème de Bézout, démontrer le théorème de Gauss.

2) Soient p et q deux entiers naturels tels que p et q sont premiers entre eux.
   Déduire du théorème de Gauss que, si a est un entier relatif, tel que $a \equiv 0\ [p]$ et $a \equiv 0\ [q]$, alors $a \equiv 0\ [pq]$.

PARTIE B

On se propose de déterminer l'ensemble $\mathscr{S}$ des entiers relatifs n vérifiant le système :

$$\begin{cases} n \equiv 9\ [17] \\ n \equiv 3\ [5] \end{cases}$$

1) Recherche d'un élément de $\mathscr{S}$.
   On désigne par (u, v) un couple d'entiers relatifs tel que $17u + 5v = 1$.
   a) Justifier l'existence d'un tel couple (u, v).
   b) On pose $n_0 = 3 \times 17u + 9 \times 5v$.
      Démontrer que n_0 appartient à $\mathscr{S}$.
   c) Donner un exemple d'entier n_0 appartenant à $\mathscr{S}$.
2) Caractérisation des éléments de $\mathscr{S}$
   a) Soit n un entier relatif appartenant à $\mathscr{S}$.
      Démontrer que $n - n_0 \equiv 0\ [85]$.
   b) En déduire qu'un entier relatif n appartient à $\mathscr{S}$ si et seulement si n peut s'écrire sous 1a forme $n = 43 + 85k$ où k est un entier relatif.
3) Application
   Zoé sait qu'elle a entre 300 et 400 jetons. Si elle fait des tas de 17 jetons, il lui en reste 9. Si elle fait des tas de 5 jetons, il lui en reste 3.
   Combien a-t-elle de jetons ?

Note : cet exercice fait référence à ce qu'on appelle le théorème chinois :
"Une bande de 17 pirates possède un trésor constitué de pièces d'or d'égale valeur. Ils projettent de se les partager également, et de donner le reste au cuisinier chinois. Celui-ci recevrait alors 3 pièces. Mais les pirates se querellent, et six d'entre eux sont tués. Un nouveau partage donnerait au cuisinier 4 pièces. Dans un naufrage ultérieur, seuls le trésor, six pirates et le cuisinier sont sauvés, et le partage donnerait alors 5 pièces d'or à ce dernier. Quelle est la fortune minimale que peut espérer le cuisinier s'il décide d'empoisonner le reste des pirates ?"

EXERCICE 18

BAC

1) On considère l'équation (E) : $8x + 5y = 1$, où $(x\,;\,y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.
   a) Donner une solution particulière de l'équation (E).
   b) Résoudre l'équation (E).
2) Soit N un nombre naturel tel qu'il existe un couple $(a\,;\,b)$ de nombres entiers vérifiant :

$$\begin{cases} N = 8a + 1 \\ N = 5b + 2. \end{cases}$$

   a) Montrer que le couple $(a\,;\,-b)$ est solution de (E).
   b) Quel est le reste, dans la division de N par 40 ?
3) a) Résoudre l'équation $8x + 5y = 100$, où $(x\,;\,y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.

b) Au VIII[e] siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?

EXERCICE 19

1) On considère l'équation où x et y sont des entiers relatifs : (E) $6x + 7y = 57$

   Déterminer un couple d'entiers relatifs $(u; v)$ tel que $6u + 7v = 1$. En déduire une solution particulière $(x_0; y_0)$ de l'équation (E).
2) Déterminer les couples solutions de l'équation (E).
3) Soit $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ un repère orthonormal de l'espace.
   On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation : $6x + 7y + 8z = 57$.
   On considère les points du plan $\mathscr{P}$ qui appartiennent aussi au plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
   Démontrer qu'un seul de ces points a pour coordonnées des entiers naturels et déterminer les coordonnées de ce point.

EXERCICE 20

Prendre toutes les initiatives

28 personnes participent à un repas gastronomique. Le prix normal est de 26 € sauf pour les étudiants et les enfants qui paient respectivement 17 et 13 euros. La somme totale recueillie est de 613 €.
Calculer le nombre d'étudiants et d'enfants ayant participé au repas. Proposer un algorithme puis deux méthodes pour résoudre ce problème.

EXERCICE 21

Prendre toutes les initiatives

En multipliant mon jour de naissance par 12 et mon mois de naissance par 31, j'obtiens 442.
Quelle est ma date de naissance ? On proposera un algorithme puis une méthode pour résoudre ce problème. (*On ne demande pas l'année, ouf !*)