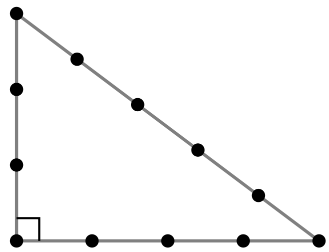
Les triplets pythagoriciens

1 Définition

Définition 1 : On dit que trois nombres a, b et c entiers naturels forment un triplet pythagoricien s'ils vérifient la relation : $a^2 + b^2 = c^2$.

Remarque : Rechercher des triplets pythagoriciens revient à chercher des triangles rectangles dont les côtés sont des nombres entiers. Le plus connu des triplets pythagoriciens est $(3\,;4\,;5)$, connu depuis l'Antiquité et utilisé par les architectes égyptiens pour tracer des angles droits.
On utilise une corde à nœuds : sur une corde fermée, on place 12 nœuds régulièrement espacés. On peut ainsi reconstituer le triangle rectangle $(3\,;4\,;5)$, et fabriquer ainsi une équerre de poche pliable !



2 Restriction de la recherche

2.1 Triplets irréductibles

Théorème 1 : Si $(a\,;b\,;c)$ est un triplet pythagoricien alors, pour tout entier naturel n, $(na\,;nb\,;nc)$ est aussi un triplet pythagoricien.

Démonstration : Immédiate, cela revient à multiplier l'égalité d'origine par n^2

Remarque : $(6\,;8\,;10)$ et $(27\,;36\,;45)$ sont obtenus en multipliant $(3\,;4\,;5)$ respectivement par 2 et 9. Ce sont donc des triplets pythagoriciens.

Théorème 2 : Si deux des trois nombres composant un triplet pythagoricien ont un diviseur commun d, alors d divise aussi le troisième nombre.

Démonstration : En effet, supposons que d soit un diviseur commun à a et b : il existe alors deux entiers, a' et b' tels que $a = da'$ et $b = db'$.
Alors $c^2 = a^2 + b^2 = d^2(a'^2 + b'^2)$. Donc d^2 divise c^2, et donc d divise c.
Par un raisonnement similaire si d est un diviseur commun à a et c, ou b et c, on montre que d divise respectivement b ou a.
Supposons que a et b soient premiers entre eux, alors a et c sont premiers entre eux. Sinon on pourrait trouver un diviseur commun $d \neq 1$ à a et c, qui diviserait alors b, ce qui est absurde puisque a et b sont supposés être premiers entre eux.

Théorème 3 : Tout triplet pythagoricien peut se ramener a un triplet pythagoricien "réduit", où a, b et c sont premiers entre eux deux a deux. Il suffit même que deux d'entre-eux le soient.

Remarque : On se limitera donc à l'étude des triplets pythagoriciens $(a,\,b,\,c)$, avec a, b et c premiers entre eux deux à deux. Un tel triplet est appelé **triplet irréductible**.

2.2 Étude de la parité

Soit $(a,\,b,\,c)$ un triplet pythagoricien irréductible. Étudions d'abord la parité de a, b et c.

- Ces trois nombres ne peuvent pas être tous pairs car ils sont premiers entre eux deux à deux.
- Pour la même raison, il ne peut pas y avoir deux nombres pairs (et un impair) : cela est immédiat, puisque a, b et c sont premiers entre eux deux à deux.
- Prouvons que les trois nombres ne peuvent pas être tous impairs :

  Si a et b sont impairs, a^2 et b^2 sont donc impairs, donc $a^2 + b^2 = c^2$ est pair. Donc c est pair.
  De même si a et c sont impairs, a^2 et c^2 sont impairs, donc $b^2 = c^2 - a^2$ est pair. Donc b est pair.

  Conclusion : deux des nombres sont impairs, et le troisième pair.
- Prouvons que c est impair.
  Supposons que a et b soient impairs (et donc c pair) : il existe donc deux entiers a' et b' tels que $a = 2a' + 1$ et $b = 2b' + 1$.

  Alors $c^2 = a^2 + b^2 = (2a'+1)^2 + (2b'+1)^2 = 4(a'^2 + a' + b'^2 + b') + 2$.

  Donc $c^2 \equiv 2 \mod 4$. Or c est pair et donc $c^2 \equiv 0 \mod 4$, ce qui est contradictoire.
  Donc a et b sont de parités différentes, et c est impair. On appelle alors b le nombre pair, et a et c les nombres impairs.

Conclusion : On étudie les triplets irréductibles $(a,\,b,\,c)$. Ces trois nombres sont premiers deux à deux ; si de plus a et c sont impairs et b est pair, on dira que le triplet est **irréductible et rangé**.

Remarque : Cette façon de ranger les trois nombres d'un triplet, au détriment possible de leur ordre relatif, permet de "standardiser" les propriétés à venir : en particulier, nous noterons (15 ; 8 ; 17) plutôt que (8 ; 15 ; 17)).

3 Détermination de tous les triplets irréductibles

Théorème 4 : Soit a, b et c trois nombres entiers. $(a\,;\,b\,;\,c)$ est un triplet pythagoricien irréductible rangé **si, et seulement si,** il existe deux nombres u et v avec $u > v$, de parités différentes et premiers entre eux, tels que :

$$a = u^2 - v^2 \quad , \quad b = 2uv \quad , \quad c = u^2 + v^2$$

Démonstration :

- **Dans le sens direct**. Soit donc $(a\,;\,b\,;\,c)$ un triplet pythagoricien irréductible rangé. Dans un tel triplet, b est pair : posons alors $b = 2p$. On a donc :

$$c^2 - a^2 = 4p^2 \quad \text{soit} \quad (c+a)(c-a) = 4p^2$$

a et c étant impairs, $c+a$ et $c-a$ sont donc tous les deux pairs.

Posons donc : $\begin{cases} c+a = 2q \\ c-a = 2r \end{cases}$ où q et r sont des entiers naturels non nuls.

De ces égalités, on tire : $a = q - r$ et $c = q + r$.

D'autre part, $c^2 - a^2 = (c+a)(c-a) = 4qr = 4p^2$ donc $p^2 = qr$.

Montrons que q et r sont des carrés d'entiers naturels.

a) Tout d'abord, ils sont premiers entre eux. En effet, tout diviseur premier commun à q et r diviserait leur somme $q + r = c$, et leur différence $q - r = a$ qui sont eux-mêmes premiers entre eux.

b) Par conséquent, chaque diviseur premier de $p^2 = qr$ ne peut donc diviser à la fois q et r ; comme p^2 est un carré, l'exposant de ce diviseur premier est pair dans celui des deux nombres où ce diviseur premier figure. Il en résulte que q et r sont effectivement des carrés d'entiers naturels, puisque chacun de leurs diviseurs premiers a un exposant pair.

Conclusion : On a donc $q = u^2$ et $r = v^2$, d'où $a = u^2 - v^2$ et $c = u^2 + v^2$. d'autre part, on sait que $b = 2p$ avec $p^2 = qr = u^2v^2$, on a alors $b = 2uv$.

Vérifions maintenant que les nombres u et v remplissent les conditions du théorème.

Comme $a = q - r > 0$, on a $q > r$ donc $u > v$. u et v ne sont pas de même parité sinon $u^2 - v^2 = a$ serait pair, ce qui n'est pas le cas avec un triplet rangé. Comme q et r sont premiers entre eux, il en est de même de u et v.

- **Réciproquement**, avec les valeur proposées pour a, b et c, on a :

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= (u^2 - v^2)^2 + (2uv)^2 = u^4 - 2u^2v^2 + v^4 + 4u^2v^2 \\ &= u^4 + 2u^2v^2 + v^4 = (u^2 + v^2)^2 = c^2 \end{aligned}$$

Comme u et v sont de parité différente, il en est de même de leur carré, ce qui prouve que a et c sont bien impairs.
Si a et c avaient un diviseur premier commun, ce diviseur diviserait $a + c = 2u^2$ et $c - a = 2v^2$. Comme ce diviseur premier ne peut pas être 2 (a et c sont impairs), il diviserait u^2 et v^2 et donc u et v, ce qui est impossible puisque u et v sont premiers entre eux.

4 Algorithme : liste des triplets pythagoriciens

On peut écrire un algorithme permettant de dresser une liste des triplets pythagoriciens jusqu'à une valeur n de $u > 2$ donné. Pour une valeur de u, on détermine les valeurs de v possibles, pour que u et v soient de parités différentes et premiers entre eux. On peut alors déterminer le triplet pythagoricien correspondant.

On trouve de tableau suivant pour $N = 9$

u	v	a	b	c
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	1	15	8	17
4	3	7	24	25
5	2	21	20	29
5	4	9	40	41
6	1	35	12	37
6	5	9	60	61
7	2	45	28	53
7	4	33	56	65
7	6	13	84	85
8	1	63	16	65
8	3	55	48	73
8	5	39	80	89
8	7	15	112	113
9	2	77	36	85
9	4	65	72	97
9	8	17	144	145

```
Variables : N, U, V, I : entiers
L1, L2, L3, L4,L5 : listes
Entrées et initialisation
    Effacer listes L1, L2, L3, L4,L5
    Lire n
    1 → I
Traitement
    pour U de 2 à N faire
        si E(U/2) = U/2 alors
            1 → V
        sinon
            2 → V
        fin
        tant que V < U faire
            si pgcd(U, V) = 1 alors
                U → L1(I)
                V → L2(I)
                U^2 − V^2 → L3(I)
                2UV → L4(I)
                U^2 + V^2 → L5(I)
                I + 1 → I
                V + 2 → V
            sinon
                V + 2 → V
            fin
        fin
    fin
Sorties : Afficher L1, L2, L3, L4, L5
```