

Révision du 13 mai 2014 : Nombres premiers

EXERCICE 1

La décomposition de a en facteurs premiers donne : $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2}$. On sait que a^2 possède 81 diviseurs. Combien a^3 possède-t-il de diviseurs ?

EXERCICE 2

Dans un *Inédit* de Marcel Pagnol, celui-ci affirme que le nombre : $N = n + (n+2) + n(n+2)$ est premier si n est impair. Qu'en pensez-vous ?

EXERCICE 3

Sans calculatrice montrer que le nombre $n^2 + n + 41$ n'est pas premier si $n = 40$.

EXERCICE 4

1) Démontrer l'égalité dite de « Sophie Germain » :

$$n^4 + 4m^4 = (n^2 + 2m^2 + 2mn)(n^2 + 2m^2 - 2mn)$$

2) n est un entier naturel, pour quelles valeurs de n , $n^4 + 4$ est-il premier ?

3) Démontrez que $4^{545} + 545^4$ n'est pas un nombre premier.

EXERCICE 5

On considère le nombre $N = p^a q^b r^c$ où p, q et r sont des nombres premiers deux à deux distinct et a, b et c des entiers naturels non nuls. Quel est le nombre de diviseurs de N ? Quel est le plus petit nombre N qui admet 18 diviseurs ?

EXERCICE 6

1) Un nombre n inférieur à 130 non divisible par aucun des 5 premiers nombres premiers est-il premier ?

2) Est-il vrai que tous les nombres premiers (sauf 2, 3, 5) sont de la forme $6n + 1$ ou $6n + 5$?

3) Démontrer que en dehors de 3, 5, 7, on ne peut trouver trois nombres premiers impairs consécutifs.

EXERCICE 7

On désigne par a et b deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 2.

1) Développer : $(a^2 + 2b^2)^2$

2) En déduire que l'entier naturel $a^4 + 4b^4$ n'est jamais premier.

EXERCICE 8

Est-il possible de trouver un nombre premier p tel que $p + 1000$ et $p + 2000$ soient aussi premiers ?

On raisonnera modulo 3, c'est à dire que l'on analysera successivement les cas $p \equiv 0$, $p \equiv 1$ et $p \equiv 2$ modulo 3.

EXERCICE 9

Un nombre n s'écrit $2^\alpha 3^\beta$. Le nombre de diviseurs de $36n$ est le triple du nombre de diviseurs de n .

Déterminer les valeurs de n possibles.

EXERCICE 10

Pour chacune des propositions suivantes

- 1) préciser si elle est vraie ;
- 2) énoncer la réciproque ;
- 3) préciser si cette proposition réciproque est vraie.

- **Proposition 1** : "Si n divise a^2 , alors n divise a "
- **Proposition 2** : "Si n est premier, alors n est impair"
- **Proposition 3** : "Si p et q sont deux nombres premiers distincts, alors p et q sont premiers entre eux"
- **Proposition 4** : "Si p est un nombre premier, alors p admet exactement deux diviseurs"
- **Proposition 5** : "Si p premier divise le produit ab , alors p divise a ou p divise b "
- p est un nombre premier
- **Proposition 6** : "Si $a \equiv p \pmod{p}$, alors a est premier"