Révision du 02 juin 2016 : Arithmétique

EXERCICE 1

Asie juin 2015

On dit qu'un entier naturel non nul N est un nombre triangulaire s'il existe un entier naturel n tel que : $N = 1 + 2 + \cdots + n$.
Par exemple, 10 est un nombre triangulaire car $10 = 1 + 2 + 3 + 4$.
Le but de ce problème est de déterminer des nombres triangulaires qui sont les carrés d'un entier.

On rappelle que, pour tout entier naturel non nul n, on a : $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Partie A : nombres triangulaires et carrés d'entiers

1) Montrer que 36 est un nombre triangulaire, et qu'il est aussi le carré d'un entier.
2) a) Montrer que le nombre $1 + 2 + \cdots + n$ est le carré d'un entier si et seulement s'il existe un entier naturel p tel que : $n^2 + n - 2p^2 = 0$.
   b) En déduire que le nombre $1 + 2 + \cdots + n$ est le carré d'un entier si et seulement s'il existe un entier naturel p tel que : $(2n+1)^2 - 8p^2 = 1$.

Partie B : étude de l'équation diophantienne associée

On considère (E) l'équation diophantienne : $x^2 - 8y^2 = 1$ où x et y désignent deux entiers relatifs.

1) Donner deux couples d'entiers naturels inférieurs à 10 qui sont solution de (E).
2) Démontrer que, si un couple d'entiers relatifs non nuls $(x\,;\,y)$ est solution de (E), alors les entiers relatifs x et y sont premiers entre eux.

Partie C : lien avec le calcul matriciel

Soit x et y deux entiers relatifs. On considère la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

On définit les entiers relatifs x' et y' par l'égalité : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

1) Exprimer x' et y' en fonction de x et de y.
2) Déterminer la matrice $\mathbf{A}^{-1}$, puis exprimer x et y en fonction de x' et y'.
3) Démontrer que $(x\,;\,y)$ est solution de (E) si et seulement si $(x'\,;\,y')$ est solution de (E).
4) On considère les suites (x_n) et (y_n) définies par $x_0 = 3$, $y_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{A}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.
   On admet que, ainsi définis, les nombres x_n et y_n sont des entiers naturels pour toute valeur de l'entier n.
   Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, le couple $(x_n\,;\,y_n)$ est solution de (E).

Partie D : retour au problème initial

À l'aide des parties précédentes, déterminer un nombre triangulaire supérieur à 2 015 qui est le carré d'un entier.

EXERCICE 2

Centres étrangers juin 2015

Dans cet exercice, on s'intéresse aux triplets d'entiers naturels non nuls $(x,\ y,\ z)$ tels que

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Ces triplets seront nommés « triplets pythagoriciens » en référence aux triangles rectangles dont ils mesurent les côtés, et notés en abrégé « TP ».
Ainsi (3, 4, 5) est un TP car $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$.

Partie A : généralités

1) Démontrer que, si $(x,\ y,\ z)$ est un TP, et p un entier naturel non nul, alors le triplet $(px,\ py,\ pz)$ est lui aussi un TP.
2) Démontrer que, si $(x,\ y,\ z)$ est un TP, alors les entiers naturels x, y et z ne peuvent pas être tous les trois impairs.
3) Pour cette question, on admet que tout entier naturel non nul n peut s'écrire d'une façon unique sous la forme du produit d'une puissance de 2 par un entier impair :
$n = 2^\alpha \times k$ où α est un entier naturel (éventuellement nul) et k un entier naturel impair.
L'écriture $n = 2^\alpha \times k$ est nommée *décomposition* de n.
Voici par exemple les *décompositions* des entiers 9 et 120 : $9 = 2^0 \times 9$,
$120 = 2^3 \times 15$.
   a) Donner la décomposition de l'entier 192.
   b) Soient x et z deux entiers naturels non nuls, dont les décompositions sont $x = 2^\alpha \times k$ et $z = 2^\beta \times m$.
   Écrire la *décomposition* des entiers naturels $2x^2$ et z^2.
   c) En examinant l'exposant de 2 dans la *décomposition* de $2x^2$ et dans celle de z^2, montrer qu'il n'existe pas de couple d'entiers naturels non nuls $(x,\ z)$ tels que $2x^2 = z^2$.

On admet que la question **A - 3.** permet d'établir que les trois entiers naturels x, y et z sont deux à deux distincts. Comme de plus les entiers naturels $x,\ y$ jouent un rôle symétrique, dans la suite, pour tout TP $(x,\ y,\ z)$, les trois entiers naturels x, y et z seront rangés dans l'ordre suivant :

$$x < y < z.$$

Partie B : recherche de triplets pythagoriciens contenant l'entier 2015

1) Décomposer en produit de facteurs premiers l'entier 2 015 puis, en utilisant le TP donné dans le préambule, déterminer un TP de la forme $(x,\ y,\ 2\,015)$.
2) On admet que, pour tout entier naturel n, $(2n+1)^2 + \left(2n^2+2n\right)^2 = \left(2n^2+2n+1\right)^2$.
Déterminer un TP de la forme $(2\,015,\ y,\ z)$.
3) a) En remarquant que $403^2 = 169 \times 961$, déterminer un couple d'entiers naturels non nuls $(x,\ z)$ tels que : $z^2 - x^2 = 403^2$, avec $x < 403$.
   b) En déduire un TP de la forme $(x,\ 2\,015,\ z)$.