Contrôle de mathématiques

Lundi 18 octobre 2010

Exercice 1

Diviseurs (5 points)

1) Trouver dans $\mathbb{N}$ tous les diviseurs de 810.

2) Trouver tous les couples d'entiers **naturels** $(x; y)$ qui vérifient :

$$x^2 = y^2 + 33$$

3) Trouver les entiers **relatifs** qui vérifient :

$$x^2 + 2x = 35$$

4) Trouver tous les entiers **relatifs** n tels que $n + 3$ divise $n + 10$.

Exercice 2

Division euclidienne (2 points)

1) Si on divise un nombre a par 18, le reste est 13. Quel est le reste de la division de a par 6 ?
2) Si l'on divise un nombre A par 6, le reste est 4. Quels sont les restes possibles de la division de A par 18 ?

Exercice 3

Congruence (5 points)

1) Quelles sont les propriétés de compatibilité de la relation de congruence avec l'addition, la multiplication et les puissances. Démontrer la propriété de compatibilité avec l'addition.

2) a) Démontrer que pour tout nombre entier naturel k on a : $2^{3k} \equiv 1(\text{modulo } 7)$.

   b) Quel est le reste dans la division euclidienne de 2^{2009} par 7 ?

3) Soient a et b deux nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 avec $a \neq 0$.
   On considère le nombre $N = a \times 10^3 + b$. On rappelle qu'en base 10 ce nombre s'écrit sous la forme $N = \overline{a00b}$.
   On se propose de déterminer parmi ces nombres entiers naturels N ceux qui sont divisibles par 7.

   a) Vérifier que $10^3 \equiv -1(\text{modulo } 7)$.

   b) En déduire tous les nombres entiers N cherchés.

Exercice 4

Liban juin 2009 (10 points)

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un entier naturel n dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009, c'est-à-dire tel que $n^3 \equiv 2009 \mod 10000$.

Partie A

1) Déterminer le reste de la division euclidienne de 2009^2 par 16.
2) En déduire que $2009^{8001} \equiv 2009 \mod 16$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2009^2 - 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1$.

1) a) Démontrer que u_0 est divisible par 5.

   b) On rappelle le binôme de newton à l'ordre 5 :

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

   Démontrer que pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n\left[u_n^4 + 5\left(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1\right)\right].$$

   c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n est divisible par 5^{n+1}.

2) a) Vérifier que $u_3 = 2009^{250} - 1$ puis en déduire que $2009^{250} \equiv 1 \mod 625$.

   b) Démontrer alors que $2009^{8001} \equiv 2009 \mod 625$.

Partie C

On admet que l'on peut montrer que $2009^{8001} - 2009$ est divisible par 10000.

Conclure, c'est-à-dire déterminer un entier naturel dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009.