Contrôle de mathématiques

Lundi 12 octobre 2009

Exercice 1

Diviseurs (5 points)

1) Trouver dans $\mathbb{N}$ tous les diviseurs de 810.

$$D_{810} = \{1; 2; 3; 5; 6; 9; 10; 15; 18; 27; 30; 45; 54; 81; 90; 135; 162; 270; 405; 810\}$$

2) Trouver tous les couples d'entiers **naturels** $(x; y)$ qui vérifient :

$$x^2 = y^2 + 33$$
$$(x+y)(x-y) = 33$$

Comme x et y sont des naturels, on a $x + y \geqslant x - y$
De plus $D_{33} = \{1; 3; 11; 33\}$
Les deux systèmes possibles sont donc :

$$\begin{cases} x+y = 33 \\ x-y = 1 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x+y = 11 \\ x-y = 3 \end{cases}$$

on obtient alors

$$\begin{cases} x = 17 \\ y = 16 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 7 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$S = \{(17; 16); (7; 4)\}$$

3) Trouver les entiers **relatifs** qui vérifient :

$$x^2 + 2x = 35$$
$$x(x+2) = 35$$

Les seuls décompositions de 35 sont : 5×7, $(-7) \times (-5)$, 1×35, $(-35) \times (-1)$

Les deux décompositions avec des entiers distants de deux sont : 5×7 et $(-7) \times (-5)$

On obtient donc : $x = 5$ ou $x = -7$.

4) Trouver tous les entiers **relatifs** n tels que $n + 3$ divise $n + 10$.

Si $n + 3$ divise $n + 10$ alors $\exists\, k \in \mathbb{Z}$ tel que : $n + 10 = k(n + 3)$

On a alors : $n + 3 + 7 = k(n + 3)$ soit $(n + 3)(k - 1) = 7$

Donc $n + 3$ divise 7. On obtient alors :

$n + 3 = -7$, $n + 3 = -1$, $n + 3 = 1$ et $n + 3 = 7$ soit :

$n \in \{-10; -4, -2, 4\}$

Exercice 2

Division euclidienne (2 points)

1) Si on divise un nombre a par 18, le reste est 13. Quel est le reste de la division de a par 6 ?

   On a :

$$a = 18q + 13$$
$$a = 6(3q) + 6 \times 2 + 1$$
$$a = 6(3q + 2) + 1$$

   Le reste est donc 1

2) Si l'on divise un nombre A par 6, le reste est 4. Quels sont les restes possibles de la division de A par 18 ?

   On a :

$$A = 6q + 4$$

   si $q \equiv 0$ (modulo3) soit $q = 3k$

$$A = 6(3k) + 4 = 18k + 4$$

   si $q \equiv 1$ (modulo3) soit $q = 3k + 1$

$$A = 6(3k + 1) + 4 = 18k + 10$$

   si $q \equiv 2$ (modulo3) soit $q = 3k + 2$

$$A = 6(3k + 2) + 4 = 18k + 16$$

   Les restes possibles sont donc : 4, 10 et 16

Exercice 3

Congruence (5 points)

1) Quelles sont les propriétés de compatibilité de la relation de congruence avec l'addition, la multiplication et les puissances. Démontrer la propriété de compatibilité avec l'addition.

   Voir le cours

2) a) Démontrer que pour tout nombre entier naturel k on a : $2^{3k} \equiv 1$(modulo 7).

   On a $2^3 = 8$ et $8 \equiv 1 \mod 7$, d'après la règle de compatibilité avec les puissances, on a :

   $(2^3)^k \equiv 1^k \mod 7$ et donc $2^{3k} \equiv 1 \mod 7$

b) Quel est le reste dans la division euclidienne de 2^{2009} par 7 ?

On a $2009 = 3 \times 669 + 2$, donc d'après la question précédente, on a :

$$2^{3\times 669} \equiv 1 \mod 7$$
$$2^{3\times 669} \times 2^2 \equiv 4 \mod 7$$
$$2^{2009} \equiv 4 \mod 7$$

Le reste de 2^{2009} par la division par 7 est 4.

3) Soient a et b deux nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 avec $a \neq 0$.
On considère le nombre $N = a \times 10^3 + b$. On rappelle qu'en base 10 ce nombre s'écrit sous la forme $N = \overline{a00b}$.
On se propose de déterminer parmi ces nombres entiers naturels N ceux qui sont divisibles par 7.

a) Vérifier que $10^3 \equiv -1$(modulo 7).

On a : $1001 = 7 \times 143$, donc $1001 \equiv 0 \mod 7$ et donc $1000 \equiv -1 \mod 7$

b) En déduire tous les nombres entiers N cherchés.

on doit donc avoir : $b - a \equiv 0 \mod 7$,
de plus comme a et b sont des chiffres (a non nul), on a $-9 \leqslant b - a \leqslant 8$
Nous avons donc les équations suivantes :
$b - a = -7 \qquad b - a = 0 \qquad b - a = 7$ ce qui donne comme possibilités :
7000 - 8001 - 9002
1001 - 2002 - 3003 - 4004 - 5005 - 6006 - 7007 - 8008 - 9009
1008 - 2009

Exercice 4

Liban juin 2009 (10 points)

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un entier naturel n dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009, c'est-à-dire tel que $n^3 \equiv 2009 \mod 10000$.

Partie A

1) Déterminer le reste de la division euclidienne de 2009^2 par 16.

On a : $2009 \equiv 9 \mod 16$ car $2009 = 16 \times 125 + 9$. On en déduit que :

$2009^2 \equiv 9^2 \mod 16$ donc $2009^2 \equiv 1 \mod 16$ car $81 = 16 \times 5 + 1$

2) En déduire que $2009^{8001} \equiv 2009 \mod 16$.

De 1), on a d'après les règles de compatibilité :

$$2009^2 \equiv 1 \mod 16$$
$$(2009^2)^{4000} \equiv 1^{4000} \mod 16$$
$$2009 \times (2009^2)^{4000} \equiv 2009 \mod 16$$
$$2009^{8001} \equiv 2009 \mod 16$$

Partie B

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2009^2 - 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = (u_n + 1)^5 - 1$.

1) a) Démontrer que u_0 est divisible par 5.

On a : $2010 \equiv 0 \mod 5$ car 2010 est divisible par 5

donc $2009 \equiv -1 \mod 5$ et donc $2009^2 \equiv 1 \mod 5$

Conclusion : $u_0 = 2009^2 - 1$ est divisible par 5.

b) On a :

$$\begin{aligned}(u_n+1)^5 - 1 &= u_n^5 + 5u_n^4 + 10u_n^3 + 10u_n^2 + 5u_n + 1 - 1\\ &= u_n(u_n^4 + 5u_n^3 + 10u_n^2 + 10u_n + 5)\\ &= u_n\left[u_n^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1)\right]\end{aligned}$$

c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n est divisible par 5^{n+1}.

- **Initialisation** : on a vu que u_0 est divisible par 5. la proposition est donc vraie à l'ordre 0
- **Hérédité** : Supposons que u_n est divisible par 5^{n+1}, montrons que u_{n+1} est divisible par 5^{n+2}.

  on a : $u_{n+1} = u_n\left[u_n^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1)\right]$, et par hypothèse $u_n = k\,5^{n+1}$

  On en déduit donc que : $u_{n+1} = k\,5^{n+1}\left[u_n^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1)\right]$ or u_n est au moins divisible par 5, donc $u_n^4 + 5(u_n^3 + 2u_n^2 + 2u_n + 1)$ est au moins divisible par 5, on en déduit que u_{n+1} est divisible par 5^{n+2}

2) a) Vérifier que $u_3 = 2009^{250} - 1$ puis en déduire que $2009^{250} \equiv 1 \mod 625$.

On a :

$$\begin{aligned}u_1 &= (u_0-1)^5 - 1 = 2009^{10} - 1\\ u_2 &= (u_1-1)^5 - 1 = 2009^{50} - 1\\ u_3 &= (u_2-1)^5 - 1 = 2009^{250} - 1\end{aligned}$$

D'après la question précédente, u_3 est divisible par $5^{3+1} = 625$ et donc que $2009^{250} \equiv 1 \mod 625$

b) Démontrer alors que $2009^{8001} \equiv 2009 \mod 625$.

On a, d'après les lois de compatibilité :

$$\begin{aligned}2009^{250} &\equiv 1 \mod 625\\ \left(2009^{250}\right)^{16} &\equiv 1^{16} \mod 625\\ 2009 \times \left(2009^{250}\right)^{16} &\equiv 1 \times 2009 \mod 625\\ 2009^{8001} &\equiv 2009 \mod 625\end{aligned}$$

Partie C

On admet que l'on peut montrer que $2009^{8001} - 2009$ est divisible par 10000.
Conclure, c'est-à-dire déterminer un entier naturel dont l'écriture décimale du cube se termine par 2009.

On sait que $2009^{8001} - 2009$ est divisible par 10000, donc 2009^{8001} se termine par 2009. Or $8001 = 3 \times 2667$ donc le nombre cherché est 2009^{2667}