Contrôle de mathématiques

Jeudi 24 janvier 2019

Exercice 1

Questions de cours **(5 points)**

1) a) Citer le théorème de Bézout.
   b) Montrer que quelque soit l'entier naturel n, les nombres $(7n+3)$ et $(2n+1)$ sont premiers entre eux.
2) Citer puis démontrer le théorème de Gauss à partir du théorème de Bézout.
3) a) Citer le corollaire du théorème de Gauss.
   b) 5 et 11 divise $(n-9)$, montrer que $n \equiv 9\ (55)$.

Exercice 2

Points de coordonnées entières sur une droite **(8 points)**

Le plan est muni d'un repère. On considère la droite Δ d'équation (E) : $y = \dfrac{m}{n}x - \dfrac{p}{q}$,
où m, n, p, q sont des entiers relatifs non nuls tels que $\text{pgcd}(m,n) = \text{pgcd}(p,q) = 1$.
Ainsi les coefficients de (E) sont des fraction irréductibles.

Le but de l'exercice est de trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la droite Δ admette des points de coordonnées entières.

1) Soit Δ_1 d'équation (E_1) $y = \dfrac{5}{4}x - \dfrac{2}{3}$
   a) Montrer que la droite Δ_1 admet des points de coordonnées entière si, et seulement si : $15x - 12y = 8$ admet des solutions entières.
   b) Montrer que la droite Δ_1 n'admet pas de point de coordonnées entières.
2) On suppose que la droite Δ : $y = \dfrac{m}{n}x - \dfrac{p}{q}$ comporte un point de coordonnées entières (x_0, y_0).
   a) Démontrer que q divise le produit np.
   b) En déduire que q divise n.
3) Réciproquement, on suppose que q divise n.
   a) On pose $n = qr$ où r est un entier relatif non nul. Démontrer que l'on peut trouver deux entiers relatifs u et v tels que : $qru - mv = 1$
   b) En déduire qu'il existe un couple (x_0, y_0) d'entiers relatifs tels que : $y_0 = \dfrac{m}{n}x_0 - \dfrac{p}{q}$.
4) a) Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour que Δ admette un point de coordonnées entières.
   b) Application : soit Δ_2 d'équation (E_2) : $y = \dfrac{3}{8}x - \dfrac{7}{4}$.
   Montrer que cette droite (Δ_2) possède un point de coordonnées entières.

EXERCICE 3

Chiffrement affine **(7 points)**

Afin de crypter un message, on utilise un chiffrement affine. Chaque lettre de l'alphabet est associée à un nombre entier comme indiqué dans le tableau ci-dessous :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On se donne une fonction de codage affine f définie par : $f(x) = 7x + 5$.

Soit x le nombre associé à la lettre à coder. On détermine le reste y de la division euclidienne de $f(x)$ par 26, puis on en déduit la lettre associée à y.

1) Coder la lettre L.
2) a) Soit m un entier relatif. Montrer l'équivalence : $7x \equiv m \pmod{26} \Leftrightarrow x \equiv 15m \pmod{26}$.
   b) En déduire la fonction de décodage.
3) Décoder la lettre F.
4) Déchiffrer un message codé avec un chiffrement affine ne pose pas de difficulté (on peut tester les 312 couples de coefficients possibles). Afin d'augmenter cette difficulté de décryptage, on propose d'utiliser une clé qui indiquera pour chaque lettre le nombre de fois où on lui applique le chiffrement affine de la partie A.

   Par exemple pour coder le mot MATH avec la clé 2-2-5-6, on applique « 2 fois » le chiffrement affine à la lettre M (cela donne E), « 2 fois » le chiffrement à la lettre A, « 5 fois » le chiffrement à la lettre T et enfin « 6 fois » le chiffrement à la lettre H.

   On donne la clé 2-2-5-6.

   Décoder la lettre Q dans le mot IYYQ.