Devoir à rendre pour le 06 novembre 2019

EXERCICE 1

Divisibilité et diviseur **(4 points)**

1) Déterminer les entiers relatifs n tels que $(n-4)$ divise $(3n-17)$
2) Déterminer les entiers relatif n tels que la fraction $\dfrac{6n+12}{2n+1}$ soit un entier relatif.
3) Montrer que si n est un entier impair alors (n^2-1) est divisible par 8.
4) Soit k un entier relatif. On pose : $a = 4k+3$ et $b = 5k-7$.
   Quels sont les valeurs possibles d'un diviseur commun à a et b ?

EXERCICE 2

Division euclidienne **(3 points)**

1) On considère l'égalité suivante : $23 \times 51 + 35 = 1\,208$
   Sans effectuer de division, répondre en vous justifiant, aux questions suivantes :
   a) Quels sont le quotient et le reste dans la division euclidienne de $(-1\,208)$ par 51 ?
   b) Quels sont le quotient et le reste dans la division euclidienne de 1 208 par 23 ?
2) On divise un entier naturel n par 152 puis par 147. Les quotients sont égaux et les restes respectifs sont 13 et 98. Quel est cet entier naturel n ?

EXERCICE 3

Restes **(2 points)**

1) Quel est le reste dans la division euclidienne par 7 de 39^{60} ?
2) Quel est le reste dans la division euclidienne par 17 de $16^{2n+1} + 18^n$

EXERCICE 4

Tableau de congruence **(4 points)**

1) Recopier et compléter cette table des restes dans la congruence modulo 4.

$x \equiv \quad (4)$	0	1	2	3
$x^2 \equiv \quad (4)$				

2) Prouver que l'équation $7x^2 - 4y^2 = 1$, d'inconnues x et y entiers relatifs, n'a pas de solution.
3) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $(x+3)^2 \equiv 1 \pmod 4$.

EXERCICE 5

Démonstration **(2 points)**

Soient $n \geqslant 2$, a et b des entiers relatifs tels que $a \equiv b \pmod{n}$

Démontrer, à l'aide de la compatibilité de la congruence par rapport à la multiplication, que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad a^k \equiv b^k \pmod{n}$

EXERCICE 6

Vrai-Faux **(5 points)**

Indiquer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses en vous justifiant :

1) **Proposition 1 :** « Le reste de la division euclidienne de 2018^{2020} par 7 est 2 ».
2) **Proposition 2 :** « 11^{2012} est congru à 4 modulo 9 ».
3) **Proposition 3 :** « $x^2 + x + 3 \equiv 0 \pmod{5}$ si, et seulement si, $x \equiv 1 \pmod{5}$ ».