Devoir à rendre pour le 13 mai 2020

EXERCICE 1

Opérations sur les matrices **(5 points)**

1) Soit la matrice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ de dimension 2×4 telle que $a_{ij} = 2ij$
   Écrire $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ où $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ est la matrice transposée de $\mathbf{A}$

2) Soit la matrice $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 10 & -2 \end{pmatrix}$
   Montrer que $\mathbf{M}^2 = 3\mathbf{M}$ puis en déduire $\mathbf{M}^3$ (*on détaillera les calculs*)

3) Soit la matrice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 8 \\ 4 & -3 & -8 \\ -4 & 2 & 7 \end{pmatrix}$.

   a) Calculer $\mathbf{A}^2$. Que peut-on dire de la matrice $\mathbf{A}$?

   b) Déterminer alors la matrice $\mathbf{X}$ telle que : $\mathbf{AX} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

EXERCICE 2

Systèmes **(4 points)**

1) Soit le système : $\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ 7x + 13y = 44 \end{cases}$

   a) Mettre ce système sous la forme matricielle $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$.

   b) Résoudre matriciellement ce système.

2) a) Donner à l'aide de la calculatrice la matrice inverse de $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   b) En déduire la résolution du système : $\begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + y - z = -1 \\ -x + y + z = 5 \end{cases}$ à l'aide de matrices.

EXERCICE 3

Matrice et arithmétique **(5 points)**

Partie A

On considère la suite (a_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} a_0 = 0, \ a_1 = 1 \\ a_{n+2} = 3a_{n+1} + 2a_n \end{cases}$

1) Calculer les 9 premiers termes de la suite (a_n) et donner les décompositions en produit de facteurs premiers de a_6 et a_8.

2) Soit $\mathbf{A}$ la matrice définie par : $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \mathbf{A} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$.

3) Montrer, par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad \mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} a_{n+1} & 2a_n \\ a_n & 2a_{n-1} \end{pmatrix}$.

Partie B

On admet que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad \det(\mathbf{A}^n) = (\det \mathbf{A})^n$

1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2 = (-2)^{n-1}$

2) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si d est un diviseur positif de a_n et a_{n+1}, alors d est une puissance de 2 puis que a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.

Partie C

1) En remarquant que $\mathbf{A}^{n+k} = \mathbf{A}^n \times \mathbf{A}^k$, montrer que pour tous entiers naturels n et k, n étant non nul, $a_{n+k} = a_{k+1}a_n + 2a_k a_{n-1}$.

2) En déduire que pour tout entier naturel n, a_n divise a_{2n} et a_{3n}.

3) Montrer que a_{24} est divisible par $15\,015 = 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13$.

Exercice 4

Œuvre aquatique **(6 points)**

Un artiste doit installer une œuvre aquatique constituée de deux bassins A et B ainsi que d'une réserve filtrante R. Au départ les deux bassins contiennent chacun 100 litres d'eau. Un système de canalisations devra permettre de réaliser, toutes les heures et dans cet ordre, les transferts d'eau suivants :

- dans un premier temps, la moitié du bassin A se vide dans la réserve R ;
- ensuite les trois quarts du bassin B se vident dans le bassin A ;
- enfin, on ajoute 200 litres d'eau dans le basin A et 300 litres d'eau dans le bassin B.

On considère les suites (a_n) et (b_n) désignant les quantités d'eau en centaines de litres qui seront respectivement contenues dans les bassins A et B au bout de n heures. On suppose que les bassins sont a priori suffisamment grand pour éviter tout débordement.

Pour tout entier n, on note $\mathbf{U}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Ainsi $\mathbf{U}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

1) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad \mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{M}\mathbf{U}_n + \mathbf{C}$ où $\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,75 \\ 0 & 0,25 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

2) On considère la matrice $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   a) Montrer que la matrice $\mathbf{P}$ est sa propre inverse.

   b) Montrer que $\mathbf{PMP}$ est une matrice diagonale $\mathbf{D}$ que l'on déterminera.

   c) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N},\quad \mathbf{M}^n = \mathbf{P}\mathbf{D}^n\mathbf{P}$.

   d) En déduire que $\mathbf{M}^n = \begin{pmatrix} 0,5^n & 3\times 0,5^n - 3\times 0,25^n \\ 0 & 0,25^n \end{pmatrix}$

3) Déterminer la matrice colonne $\mathbf{X}$ telle que $\mathbf{X} = \mathbf{MX} + \mathbf{C}$.

4) On définit la matrice $\mathbf{V}_n$ par : $\mathbf{V}_n = \mathbf{U}_n - \mathbf{X}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

   a) Montrer que : $\mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{M}\mathbf{V}_n$ puis en déduire $\mathbf{V}_n$ en fonction de $\mathbf{V}_0$.

b) Montrer alors que pour $n \geqslant 1 \quad \mathbf{U}_n = \begin{pmatrix} -18 \times 0,5^n + 9 \times 0,25^n + 10 \\ -3 \times 0,25^n + 4 \end{pmatrix}$

5) a) Déterminer les limites des suites (a_n) et (b_n).

b) Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont majorées puis en déduire la contenance des deux bassin A et B à prévoir pour éviter tout débordement.

On admettra que la suite (a_n) est croissante.