BACCALAURÉAT BLANC

DE MATHÉMATIQUES

– SÉRIE S –

Durée de l'épreuve : 1 HEURES
Les calculatrices sont AUTORISÉES

Coefficient : 9

Sur l'en-tête de votre copie, précisez clairement et distinctement :

- *le nom de l'épreuve : épreuve de mathématiques.*
- ***votre spécialité** : mathématique, physique ou SVT.*

TOURNEZ LA PAGE S.V.P.

EXERCICE 1 (6 points)

1) $a_2 = \dfrac{4^5+1}{5} = 205$ et $a_3 = \dfrac{4^7+1}{5} = 3\,277$.

2) $\forall n \in \mathbb{N},\ \ 16a_n - 3 = \dfrac{16(4^{2n+1}+1)}{5} - 3 = \dfrac{4^2 \times 4^{2n+1} + 16 - 15}{5} = \dfrac{4^{2n+3}+1}{5} = a_{n+1}$

3) $4 \equiv -1\ (5) \overset{\uparrow(2n+1)}{\Rightarrow} 4^{2n+1} \equiv (-1)^{2n+1} \equiv -1\ (5) \overset{+1}{\Rightarrow} 4^{2n+1} + 1 \equiv 0\ (5)$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^{2n+1} + 1$ est divisible par 5 et donc a_n est un entier naturel.

4) a) $d_n = \text{pgcd}(a_n\ ,\ a_{n+1})$.

d_n divise a_n et a_{n+1}, donc d_n divise toute combinaison linéaire de a_n et a_{n+1} donc d_n divise $16a_n + (-1)a_{n+1} = 16a_n - (16a_n - 3) = 3$.
d_n est un diviseur positif de 3 donc $d_n = 1$ ou $d_n = 3$.

b) On a : $16 \equiv 1\ (3)$ car $16 = 3 \times 5 + 1$ et $3 \equiv 0\ (3)$.
Par compatibilité avec les congruence $\forall n \in \mathbb{N},\ \ a_{n+1} \equiv 16a_n + 3 \equiv a_n\ (3)$.

c) $a_0 = \dfrac{4+1}{5} = 1$ donc $a_0 \equiv 1\ (3)$.
Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ \ a_{n+1} \equiv a_n$, on déduit que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ a_n \equiv 1\ (3)$.

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n n'est n'est pas divisible par 3.

d) Si pour tout n, a_n n'est pas divisible par 3 alors, $d_n \neq 3$, comme d'après 4)a) d_n ne peut prendre comme valeur 1 ou 3, on en déduit que $d_n = 1$. Les entiers a_n et a_{n+1} sont premiers entre pour tout $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 2 (4 points)

1) a) On cherche une solution évidente à l'équation (E).
Le couple $(1\ ,3)$ est solution de (E) car : $19(1) - 6(3) = 19 - 18 = 1$.

Soit (x, y) une solution de l'équation (E), on a : $\begin{cases} 19x - 6y = 1 \\ 19(1) - 6(3) = 1 \end{cases}$

On soustrait terme à terme, on trouve alors :

$$19(x-1) - 6(y-3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 19(x-1) = 6(y-3) \ \ (E').$$

6 divise $19(x-1)$, or 6 et 19 sont premiers entre eux donc, d'après le théorème de Gauss, 6 divise $(x-1)$. On a : $x - 1 = 6k$ avec $k \in \mathbb{Z}$.
En remplaçant dans (E'), on obtient : $y - 3 = 19k$.

Les solutions de $(E$ sont de la forme : $\begin{cases} x - 1 = 6k \\ y - 3 = 19k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 6k \\ y = 3 + 19k \end{cases} \ k \in \mathbb{Z}.$

Réciproquement, en remplaçant dans (E), ces valeurs vérifient bien l'équation (E).

b) $2\,000 \leqslant x \leqslant 2\,100 \Leftrightarrow 2000 \leqslant 1 + 6k \leqslant 2100 \Leftrightarrow 1999 \leqslant 6k \leqslant 2099 \overset{\div 6}{\Leftrightarrow}$
$334 \leqslant k \leqslant 349$.

Il y a $349 - 334 + 1 = 16$ valeurs de x qui conviennent (de 334 à 349).

2) Soit $d = \text{pgcd}(2n+3\ ,\ n+3)$.

d divise $(2n+3)$ et $(n+3)$, donc d divise toute combinaison linéaire de $(2n+3)$ et $(n+3)$ donc d divise $(-1)(2n+3)+2(n+3) = -2n-3+2n+6 = 3$.
d est un diviseur positif de 3 donc $d = 1$ ou $d = 3$.

Si $d = 3$ alors $(2n+3)$ et $(n+3)$ sont des multiples de 3. On a donc :

$$\begin{cases} n+3 \equiv 0\ (3) \\ 2n+3 \equiv 0\ (3) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \equiv 0\ (3) \\ 2n \equiv 0\ (3) \end{cases} \Rightarrow n \equiv 0\ (3)$$

Si n n'est pas un multiple de 3 alors $(2n+3)$ et $(n+1)$ sont premier entre eux.

Réciproquement si $d = 1$ alors n n'est pas un multiple de 3.