Compléments sur les nombres complexes

Table des matières

1 Trigonométrie

1.1 Formules de Moivre et d'Euler

Théorème 1 : Pour tout réel θ et pour tout entier naturel n on a :

- Formule de Moivre : $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$
- Formules d'Euler : $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$

Démonstration :

- La formule de Moivre vient de la propriété de la fonction exponentielle :
$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$
- Les formules d'Euler viennent des relations :

$$\begin{cases} e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta & (1) \\ e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1)+(2) & \cos\theta = \dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \\ (1)-(2) & \sin\theta = \dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} \end{cases}$$

1.2 Linéarisation

Le but de la linéarisation consiste à écrire $\cos^n x$ ou $\sin^n x$ en une combinaison linéaire de $\cos(kx)$ ou $\sin(kx)$.
La linéarisation permet de trouver une primitive d'une fonction circulaire.
On utilise conjointement les formules d'Euler et la formule du binôme :

$$\cos^n x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^n \quad \text{et} \quad \sin^n x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^n$$

Exemple : Linéariser $\cos^3 x$ et $\sin^3 x$ puis calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\,dx$.

- $$\begin{aligned}\cos^3 x &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}\left(e^{3ix}+3e^{2ix}e^{-ix}+3e^{ix}e^{-2ix}+e^{-3ix}\right)\\ &= \frac{1}{8}\left(e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2}+3\times\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)\\ &= \frac{1}{4}(\cos 3x + 3\cos x)\end{aligned}$$
- $$\begin{aligned}\sin^3 x &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 = -\frac{1}{8i}\left(e^{3ix}-3e^{2ix}e^{-ix}+3e^{ix}e^{-2ix}-e^{-3ix}\right)\\ &= -\frac{1}{8i}\left(e^{3ix}-3e^{ix}+3e^{-ix}-e^{-3ix}\right) = -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{3ix}-e^{-3ix}}{2i}-3\times\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)\\ &= -\frac{1}{4}(\sin 3x - 3\sin x) = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)\end{aligned}$$

- $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\sin x - \sin 3x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left[-3\cos x + \frac{\cos 3x}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= \frac{1}{4}\left(-0+0+3-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

1.3 Transformation de $a \cos x + b \sin x$

Théorème 2 : Soit a et b deux réel. On a l'égalité suivante :

$$a\cos x + b\sin x = \mathrm{Re}\left[e^{ix}(a - ib)\right]$$

Démonstration : Il suffit de développer :

$$\begin{aligned} e^{ix}(a-ib) &= (\cos x + i\sin x)(a-ib) = a\cos x + ia\sin x - ib\cos x + b\sin x \\ &= (a\cos x + b\sin x) + i(a\sin x - b\cos x) \end{aligned}$$

On a donc bien : $\mathrm{Re}\left[e^{ix}(a-ib)\right] = a\cos x + b\sin x$

Exemple : Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 1$

On détermine la forme exponentielle de $1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

On simplifie l'expression avec : $e^{ix}(1-i\sqrt{3}) = e^{ix} \times 2e^{-i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}$

En prenant la partie réelle, l'équation devient :
$2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3}$

On obtient alors les deux familles de solutions :

$$\begin{cases} x - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{3} & [2\pi] \\ x - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{3} & [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2\pi}{3} & [2\pi] \\ x = 0 & [2\pi] \end{cases}$$

Remarque : Une autre méthode moins élégante consiste à factoriser par $\sqrt{a^2+b^2}$ puis à reconnaître une formule d'addition :

$$\begin{aligned} \cos x + \sqrt{3}\sin x &= \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} \times \left(\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\cos x - \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\sin x\right] \\ &= 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \end{aligned}$$

2 Racines n-ième de l'unité

Théorème 3 : Les racines n-ième de l'unité ($n \geqslant 2$).

- Ce sont les solutions de l'équation $z^n = 1$.
- Il y en a n : $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ avec $k \in [\![0\,;\,n-1]\!]$

  Leur module vaut 1 et leur argument $\dfrac{2k\pi}{n}$.
- Leur somme est nulle : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z_k = 1 + z_1 + z_2 + \cdots + z_{n-1} = 0$
- Leurs images M_k dans le plan complexe sont les sommets d'un polygone régulier de n côtés inscrit dans le cercle unité.
- Si $n = 2$, deux solutions 1 et -1.

  Si $n = 3$, trois solutions solutions 1, $j = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $j^2 = -\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

  Si $n = 4$, quatre solutions solutions 1, i, -1 et $-i$.

Démonstration :

- On utilise la forme exponentielle décomposée en module et argument

$$z^n = 1 \Leftrightarrow |z^n| = 1 \text{ et } \arg(z^n) = 2k\pi \Leftrightarrow |z|^n = 1 \text{ et } n\arg(z) = 2k\pi$$
$$\Leftrightarrow |z| = 1 \text{ et } \arg(z) = \frac{2k\pi}{n}$$

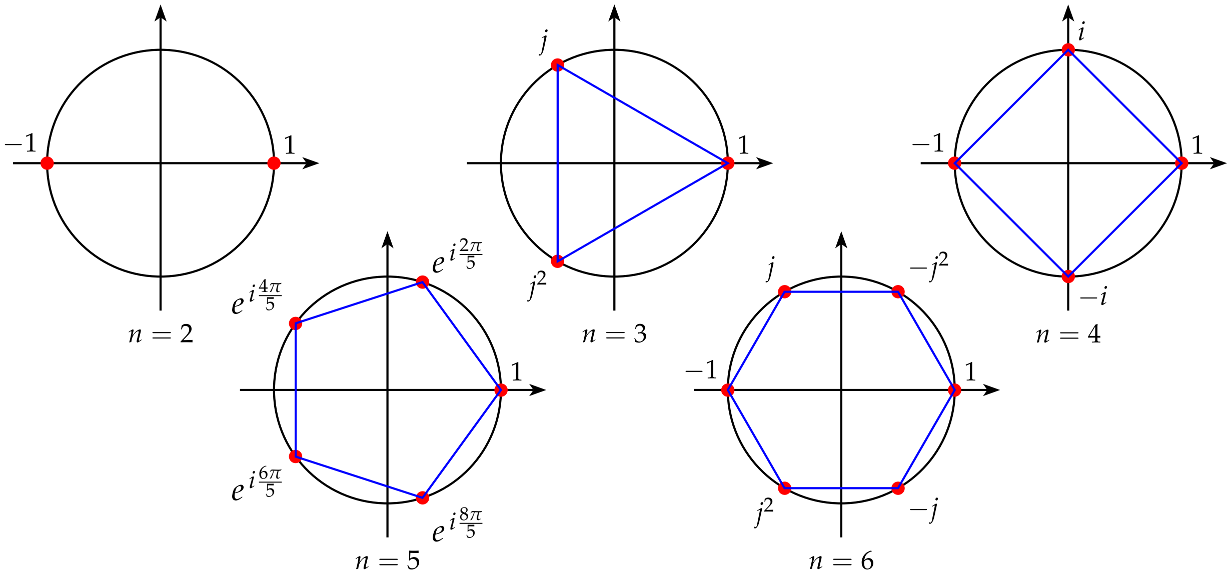
Il y a donc n angles distincts correspondant aux valeurs de k dans $[\![0\,;\,n-1]\!]$

On peut alors remarquer que les solutions sont les puissances de $z_1 = e^{i\frac{2\pi}{n}}$.
En effet $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} = \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k = z_1^k$

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z_k = \sum_{k=0}^{n-1} z_1^k = 1 + z_1 + \cdots + z_1^{n-1} = \frac{1 - z_1^n}{1 - z_1} = 0$ car $z_1^n = z_0 = 1$
- Soit les points $\mathrm{M}_k(z_k)$, on a alors $(\overrightarrow{\mathrm{OM}_k}, \overrightarrow{\mathrm{OM}_{k+1}}) = \dfrac{2\pi}{n}$ avec $k \in [\![0\,;\,n-1]\!]$.
Les points M_k sont alors les sommets d'un polygone régulier de n côtés.
- On peut visualiser les solutions de $z^n = 1$ pour $n \in [\![2\,;\,6]\!]$

On remarquera le nombre $j = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Ce nombre possède les propriétés suivantes qu'il est bon de mémoriser :

$1 + j + j^2 = 0 \quad , \quad j^2 = \overline{j} \quad , \quad -j^2 = 1 + j = e^{i\frac{\pi}{3}}$



3 Écriture complexe des transformations élémentaires

3.1 Définition

Définition 1 : Une transformation plane t est une bijection du plan $\mathscr{P}$ dans lui-même. À un point M on associe un point M′ appelé image de M par la transformation t.

On appelle écriture complexe d'une transformation, la fonction bijective complexe f qui à l'affixe z de M associe l'affixe z' de M′ : $z' = f(z)$

Remarque : Comme une transformation est une bijection, à toute transfomation t il existe une transformation réciproque t^{-1}.
On s'intéressera dans une transformation aux points fixes (M′ = M) et aux images de droites ou de cercles.

Exemple : Soit la transformation d'écriture complexe : $z' = (2+3i)z + 1 - i$

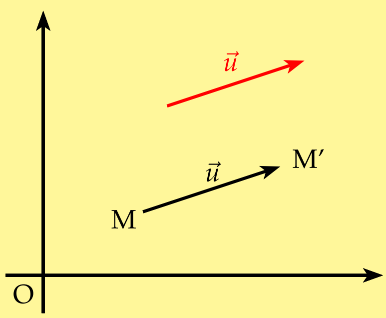
3.2 Écriture complexe d'une translation

Théorème 4 : Soit $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$, on a alors :

$$\overrightarrow{\mathrm{MM'}} = \vec{u}$$

Si M(z), M′(z') et $\vec{u}(b)$, l'écriture complexe de la translation est donc :

$$z' = z + b$$



Remarque : La translation n'a pas de point fixe.

Exemple : Soit $A(1-i)$ et $B(3+2i)$
Déterminer l'écriture complexe de la translation qui transforme A en B.
On a alors $\vec{u} = z_{\overrightarrow{AB}} = 3+2i-1+i = 2+3i$.
On obtient alors l'écriture complexe : $z' = z+2+3i$

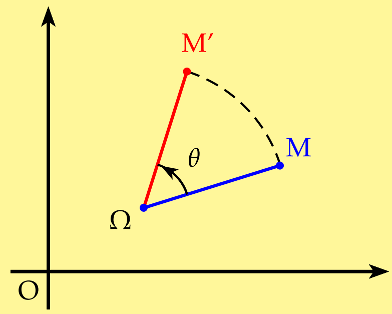
3.3 Écriture complexe d'une rotation

Théorème 5 : Soit $r_{\Omega,\theta}$ la rotation de centre Ω et d'angle θ. On a alors :

$$\Omega M' = \Omega M \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta$$

Si $M(z)$, $M'(z')$ et $\Omega(\omega)$, on a alors :

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z-\omega)$$



Remarque : La rotation possède un point fixe : son centre.
Lorsque $\theta = \pi$ la rotation est alors la symétrie de centre Ω.
Lorsque $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ ou $\theta = -\dfrac{\pi}{2}$ la rotation est un quart de tour direct ou indirect.

Exemple : Écriture complexe d'un quart de tour direct de centre $\Omega(1+2i)$.

$$z' - (1+2i) = e^{i\frac{\pi}{2}}(z-1-2i) \quad \Leftrightarrow \quad z' = iz - i + 2 + 1 + 2i$$
$$z' = iz + 3 + i$$

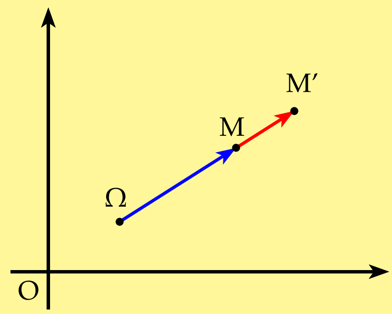
3.4 Écriture complexe d'une homothétie

Théorème 6 : Soit $h_{\Omega,k}$ l'homothétie de centre Ω et de rapport non nul k. :

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k\,\overrightarrow{\Omega M}, \quad k \in \mathbb{R}^*$$

Si $M(z)$, $M(z')$ et $\Omega(\omega)$, on a alors :

$$z' - \omega = k(z-\omega)$$



Remarque : L'homothétie possède un point fixe : son centre.
Si $k = -1$ l'homothétie est alors la symétrie de centre Ω
$|k| > 1$ correspond à un agrandissement et $|k| < 1$ correspond à une réduction

Exemple : h est l'homothétie de centre O qui transforme $A(2-2i)$ en $B(-3+3i)$.
Écriture complexe de h.

On a alors $z' = kz$ donc $k = \dfrac{-3+3i}{2-2i} = \dfrac{-3(1-i)}{2(1-i)} = -\dfrac{3}{2}$

L'écriture complexe est alors : $z' = -\dfrac{3}{2}z$.