Compléments sur les suites
Suites adjacentes - Correction

I Encadrement d'une suite

EXERCICE 1

1) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in [k\,;\,k+1]$, $\quad \dfrac{1}{k+1} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{k}$

En intégrant l'encadrement

$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{k+1} \leqslant \ln(k+1) - \ln k \leqslant \frac{1}{k}$$

2) On minore u_n avec l'encadrement trouvé :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=1}^{n} [\ln(k+1) - \ln k]$$

Comme la dernière somme est télescopique, on a

$$u_n \geqslant \ln(n+1) - \ln 1 \quad \Leftrightarrow \quad u_n \geqslant \ln(n+1)$$

or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$, par comparaison $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

La suite $u_n)$ diverge vers $+\infty$

EXERCICE 2

1) Si $k \geqslant 2$ et $x \in [k-1\,;\,k]$ alors $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{x^2}$

En intégrant l'encadrement on trouve : $\displaystyle\frac{1}{k^2} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

2) D'après (2) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

$$\sum_{k=2}^{n} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x + \int_2^3 \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x + \cdots + \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^n \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

Donc on a $\displaystyle u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \int_1^n \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$

- Pour (2) : l'inverse au carré de k est inférieur à l'aire sous la courbe de la fonction inverse au carré entre les abscisses $(k-1)$ et k.
- Pour (3) : la somme des inverses au carré à partir de 2 est inférieur à l'aire sous la courbe de la fonction inverse au carré entre les abscisses 1 et n.

3) $\displaystyle\int_1^n \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^n = 1 - \frac{1}{n}$. Donc $\forall n \geqslant 2,\ u_n \leqslant 1$

4) La suite (u_n) est croissante, car somme de termes positifs, et majorée par 1, d'après le théorème sur les suite monotone, la suite (u_n) est convergente vers $\ell \leqslant 1$

EXERCICE 3

1) $\displaystyle\frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$

$$v_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \left[\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right]$$

Cette dernière somme est télescopique donc $v_n = 1 + \dfrac{1}{1} - \dfrac{1}{n} = 2 - \dfrac{1}{n} \leqslant 2$

2) $\forall k \geqslant 2,\quad \dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{(k-1)k} \quad \Rightarrow \quad 1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k} \quad \Rightarrow \quad u_n \leqslant v_n \leqslant 2$

La suite (u_n) est croissante, car somme de termes positifs, et majorée par 2, d'après le théorème des suites monotones, la suite (u_n) converge vers $\ell \leqslant 2$

II Calcul de somme

EXERCICE 4

Calculer les sommes suivantes :

1) $S_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1 = n,$ somme de n fois 1

2) $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} n = n(n+1)$ somme de $(n+1)$ fois n

3) $S_3 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ somme des n premiers entiers naturels.

EXERCICE 5

1) $S_1 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right] = 1 - \frac{1}{n+1}.$

2) $\forall k \geqslant 2,\quad \ln\left(1 - \dfrac{1}{k}\right) = \ln\left(\dfrac{k-1}{k}\right) = \ln(k-1) - \ln k$

$$S_2 = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=2}^{n} [\ln(k-1) - \ln k] = \ln 1 - \ln n = -\ln n$$

3) $\forall k \geqslant 2, \quad \ln\left(1-\dfrac{1}{k^2}\right) = \ln\left(\dfrac{(k-1)(k+1)}{k^2}\right) = \ln(k-1)+\ln(k+1)-2\ln k$

$$= [\ln(k-1)-\ln k] + [\ln(k+1)-\ln k]$$

$$S_3 = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^{n}[\ln(k-1)-\ln k] + \sum_{k=2}^{n}[\ln(k+1)-\ln k]$$

$$= \ln 1 - \ln n + \ln(n+1) - \ln 2 = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln 2 = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln 2$$

Exercice 6

1) À la n-ième étape, il y a n carrés de côté $\dfrac{1}{2^{n-1}}$ et donc de surface $\dfrac{1}{4^{n-1}}$

On a donc $\quad S_n = 1 + 2\times\dfrac{1}{4} + 3\times\dfrac{1}{4^2} + \cdots + n\times\dfrac{1}{4^{n-1}} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\times\frac{1}{4^{k-1}}$

2) f est la dérivée de F telle que $F(x) = x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n$

$F(x)$ est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison x et de 1er terme x. On a donc pour $x \neq 1$: $F(x) = x\times\dfrac{1-x^n}{1-x} = \dfrac{x^{n+1}-x}{x-1}$

Pour retrouver f il suffit de dériver F :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{[(n+1)x^n - 1](x-1) - (x^{n+1}-x)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{(n+1)x^{n+1} - (n+1)x^n - x + 1 - x^{n+1} + x}{(x-1)^2} \\ &= \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2} \end{aligned}$$

3) Pour S_n, on prend $\quad x = \dfrac{1}{4}$, on a :

$$S_n = \frac{n\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - (n+1)\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1}{\left(\frac{1}{4}-1\right)^2} = \frac{16}{9}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^n\left(\frac{n}{4}-n-1\right)+1\right]$$

$$= \frac{16}{9}\left[-\frac{3n}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n - \left(\frac{1}{4}\right)^n + 1\right]$$

$$n\left(\frac{1}{4}\right)^n = ne^{-n\ln 4} = \frac{1}{\ln 4}\times\frac{n\ln 4}{e^{n\ln 4}}, \quad \text{or} \quad \lim_{n\to+\infty}\frac{n\ln 4}{e^{n\ln 4}} = \lim_{X\to+\infty}\frac{X}{e^X} = 0.$$

donc $\quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0 \quad$ et $\quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n = 0 \quad$ car $\; -1 < \dfrac{1}{4} < 1$

Par produit, somme et quotient $\quad \displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{16}{9}$

On peut proposer l'algorithme suivant :

Pour $N = 10$, on trouve $S = 1{,}777\,8$

$\dfrac{16}{9} \approx 1,\overline{777}$

Variables : N, I entiers S réel
Entrées et initialisation
 Lire N
 $0 \to S$
Traitement
 pour I de 1 à N **faire**
  $S + I \times \dfrac{1}{4^{I-1}} \to S$
 fin
Sorties : Afficher S

III Suites récurrentes d'ordre 2

EXERCICE 7

1) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} = u_{n+2} - u_{n+1} = \dfrac{3}{2}u_{n+1} - \dfrac{1}{2}u_n - u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_{n+1} - u_n) = \dfrac{1}{2}v_n$

La suite (v_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ et de 1er terme $v_0 = 2 - 1 = 1$

2) $S_n = \displaystyle\sum_0^n v_n = \sum_0^n (u_{n+1} - u_n) = u_{n+1} - u_0 = u_{n+1} - 1$ somme télescopique.

$$S_n = \sum_0^n v_n = v_0 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]$$

Des deux expressions de S_n, on a :

$$u_{n+1} - 1 = 2\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] \Leftrightarrow u_{n+1} = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \Leftrightarrow u_n = 3 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

3) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ car $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$. Par somme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 3$

EXERCICE 8

1) • $(t_n) \in (\mathrm{E}),\ n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \lambda^{n+1} - \lambda^n = 0,24\lambda^{n-1} \overset{\div\lambda^{n-1}}{\Rightarrow} \lambda^2 - \lambda - 0,24 = 0$

• Réciproquement $n \in \mathbb{N}^*$,

$\lambda^2 - \lambda - 0,24 = 0 \overset{\times\lambda^{n-1}}{\Rightarrow} \lambda^{n+1} - \lambda^n = 0,24\lambda^{n-1} \Rightarrow t_{n+1} - t_n = 0,24t_{n-1}$

Conclusion : $(t_n) \in (\mathrm{E}) \Leftrightarrow \lambda^2 - \lambda - 0,24 = 0$

On résout l'équation $\Delta = 1,96 = 1,4^2$

$$\lambda_1 = \frac{1 + 1,4}{2} = 1,2 \quad \text{ou} \quad \lambda_2 = \frac{1 - 1,4}{2} = -0,2$$

Les deux suites (t_n) sont les suites $(1,2^n)$ et $((-0,2)^n)$.

2) $u_n = \alpha(1,2)^n + \beta(-0,2)^n$, on déduit le système :

$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_1 = 6,6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = 6 \ (\times 1,2) \\ 1,2\alpha - 0,2\beta = 6,6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1,2\alpha + 1,2\beta = 7,2 \ (1) \\ 1,2\alpha - 0,2\beta = 6,6 \ (2) \end{cases}$$

$(1)-(2)$: $1,4\beta = 0,6 \Leftrightarrow \beta = \dfrac{3}{7}$, et de (1) : $\alpha = 6 - \beta = 6 - \dfrac{3}{7} = \dfrac{39}{7}$.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{39}{7}(1,2)^n + \dfrac{3}{7}(-0,2)^n$.

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} (1,2)^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} (-0,2)^n = 0$ car $-1 < -0,2 < 1 < 1,2$

Par produit et somme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

EXERCICE 9

1) $u_2 = 2$, $u_3 = 3$, $u_4 = 5$, $u_5 = 8$, $u_6 = 13$.

2) a) $a_{n+1} = \alpha u_{n+2} + u_{n+1} = \alpha u_{n+1} + \alpha u_n + u_{n+1} = (\alpha+1)u_{n+1} + \alpha u_n$ (1)

- (a_n) géométrique alors $a_{n+1} = q\,a_n = q\alpha\,u_{n+1} + q\,u_n$

  Par identification avec (1), on obtient le système :

  $$\begin{cases} \alpha + 1 = q\alpha \ \ (2) \\ \alpha = q \end{cases} \overset{q=\alpha\ (2)}{\Leftrightarrow} \alpha + 1 = \alpha^2 \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha - 1 = 0$$

- Réciproquement si $\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$, en posant $q = \alpha$, on obtient alors $a_{n+1} = qa_n$. La suite (a_n) est alors géométrique.

Conclusion : (a_n) géométrique $\Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha - 1 = 0$

b) $\Delta = 5$, on obtient les solutions $\alpha_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\alpha_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

c) Les suites (v_n) et (w_n) sont géométriques de raisons respectives α_1 et α_2 :

$$v_n = v_0\,\alpha_1^n = (1+\alpha_1)\,\alpha_1^n = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \times \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$w_n = w_0\,\alpha_2^n = (1+\alpha_2)\,\alpha_2^n = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \times \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

3) $\alpha_1 - \alpha_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5}$

$$\frac{v_n - w_n}{\sqrt{5}} = \frac{\alpha_1 u_{n+1} + u_n - \alpha_2 u_{n+1} - u_n}{\sqrt{5}} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)u_{n+1}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}\,u_{n+1}}{\sqrt{5}} = u_{n+1}$$

On a alors pour $n > 1$

$$u_n = \frac{v_{n-1} - w_{n-1}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2} \times \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} - \frac{3-\sqrt{5}}{2} \times \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

On a la formule de Binet : $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$

4) On peut proposer l'algorithme suivant :

On retrouve alors les résultats trouvés à la question 1) en rentrant $N = 6$

Variables : N, I, U entiers
Entrées et initialisation
  Lire N
Traitement et sorties
  pour I de 1 à N **faire**
    $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{I+1} - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{I+1}\right] \to U$
    Afficher U
  fin

IV Limites de suites

Exercice 10

1) a) $f'(x) = 1,4 - 0,1x$,

si $x \leqslant 8 \;\Leftrightarrow\; 0,1x \leqslant 0.8 \;\Leftrightarrow\; -0,1x \geqslant -0.8 \;\Leftrightarrow\; 1,4 - 0,8x \geqslant 0,6 > 0$

La fonction f est croissante sur $[0\,;8]$. On a $f(0) = 0$ et $f(8) = 8$

L'intervalle image de $[0\,;8]$ est $[0\,;8]$ donc l'intervalle $[0\,;8]$ est stable par f.

b) Montrons la proposition $0 \leqslant v_n < v_{n+1} \leqslant 8$ par récurrence :

Initialisation : $n = 0$ $v_0 = 6$ et $v_1 = 1,4 \times 6 - 0,05 \times 36 = 6,6$.
On a $0 \leqslant v_0 < v_1 \leqslant 8$. La proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $0 \leqslant v_n < v_{n+1} \leqslant 8$, montrons alors que $0 \leqslant v_{n+1} < v_{n+2} \leqslant 8$.

$$0 \leqslant v_n < v_{n+1} \leqslant 8 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(0) \leqslant f(v_n) < f(v_{n+1}) \leqslant f(8) \Leftrightarrow$$
$$0 \leqslant v_{n+1} < v_{n+2} \leqslant 8 \qquad \text{La proposition est héréditaire.}$$

Par initialisation et hérédité ; $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant v_n < v_{n+1} \leqslant 8$

La suite (v_n) est croissante et bornée par $[0\,;8]$.

2) La suite (v_n) est croissante et majorée par 8, d'après le théorème des suites monotones, la suite (v_n) est convergente vers $0 \leqslant \ell \leqslant 8$

Comme la fonction f est continue sur $[0\,;\,8]$, La limite ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$

$\ell = f(\ell) \;\Leftrightarrow\; \ell = 1,4\ell - 0,05\ell^2 \;\Leftrightarrow\; \ell(0,05\ell - 0,4) = 0 \;\Leftrightarrow\; \ell = 0$ ou $\ell = 8$

$\ell = 0$ n'est pas acceptable car (v_n) est croissante et $v_0 = 6$, donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} v_n = 8$

EXERCICE 11

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \dfrac{1}{n+k} \geqslant \dfrac{1}{2n}$

On a donc $S_{2n} - S_n \geqslant \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n} \quad \Leftrightarrow \quad S_{2n} - S_n \geqslant \frac{n}{2n} \quad \Leftrightarrow \quad S_{2n} - S_n \geqslant \frac{1}{2}$

$(S_{2n} - S_n)$ est minorée par $\dfrac{1}{2}$

Si (S_n) est convergente vers ℓ, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \ell$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \ell$, par somme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_{n+1} - S_n = 0$.

La suite $(S_{2n} - S_n)$ n'est pas minorée par $\dfrac{1}{2}$. Contradiction.

Donc la suite (S_n) diverge. Comme la suite (S_n) est la somme de termes positifs, la suite (S_n) est croissante. On en conclut alors que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$

V Suites adjacentes

EXERCICE 12

1) $(a-b)^2 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 \geqslant 2ab$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \overset{a^2+b^2 \geqslant 2ab}{\Leftrightarrow} (a+b)^2 \geqslant 4ab$

$a > 0$ et $b > 0$, on prend la racine carrée : $a + b \geqslant 2\sqrt{ab} \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$

2) Démontrons la propriété $0 < a_n \leqslant b_n$ par récurrence :

Initialisation : $n = 1,\ a_1 = \sqrt{ab} > 0$ et $b_1 = \dfrac{a+b}{2} > 0$.

D'après 1) $\sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2}$ donc $a_1 \leqslant b_1$. La proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

On suppose que $0 < a_n \leqslant b_n$, montrons que $0 < a_{n+1} \leqslant b_{n+1}$.

$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} > 0$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} > 0$.

D'après 1) $\sqrt{a_n b_n} \leqslant \dfrac{a_n + b_n}{2}$ donc $a_{n+1} \leqslant b_{n+1}$. La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < a_n \leqslant b_n$

3) $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \overset{b_n \geqslant a_n}{\Leftrightarrow} a_{n+1} \geqslant \sqrt{a_n^2} \quad \Leftrightarrow \quad a_{n+1} \geqslant a_n$

La suite (a_n) est croissante.

$b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \overset{a_n \leqslant b_n}{\Leftrightarrow} b_{n+1} \leqslant \dfrac{b_n + b_n}{2} \quad \Leftrightarrow \quad b_{n+1} \leqslant b_n$

La suite (b_n) est décroissante.

4) Les suites (a_n) et (b_n) sont respectivement croissante et décroissante et $a_1 \leqslant a_n \leqslant b_n \leqslant b_1$ donc sont respectivement majorée par b et minorée par a, d'après le théorème des suites monotones, les suites (a_n) et (b_n) convergent respectivement vers ℓ et ℓ'.

$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \ell'$ par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n + b_n = \ell + \ell'$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} 2b_{n+1} = 2\ell' \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} a_n + b_n = 2\ell'$ donc $\ell + \ell' = 2\ell' \Leftrightarrow \ell = \ell'$

Les suites (a_n) et (b_n) convergent vers la même limite ℓ.

Exercice 13

1) On peut proposer l'algorithme suivant, en passant par une variable auxiliaire W pour ne pas « fausser le résultat ».

On trouve alors :

$u_{10} = 1{,}142\,8$ et $v_{10} = 1{,}142\,9$

On peut conjecturer que les deux suites convergent vers la même limite $\ell \approx 1{,}142\,9$.

Variables : N, I entiers U, V, W réels
Entrées et initialisation
  Lire N
  $-1 \to U$
  $2 \to V$
Traitement
  pour I de 1 à N **faire**
    $U \to W$
    $\dfrac{U+V}{2} \to U$
    $\dfrac{W+4V}{5} \to V$
  fin
Sorties : Afficher U, V

2) a) Montrons la propriété $u_n < v_n$ par récurrence.

Initialisation : $n = 0$, $u_0 = -1$ et $v_0 = 2$ donc $u_0 < v_0$. La propriété est initialisée.

Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $u_n < v_n$, montrons que $u_{n+1} < v_{n+1}$.

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5} - \frac{u_n + v_n}{2} = \frac{2u_n + 8v_n - 5u_n - 5v_n}{10} = \frac{3(v_n - u_n)}{10}$$

D'après HR, $v_n - u_n > 0$ donc $v_{n+1} - u_{n+1} > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} < v_{n+1}$.

La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < v_n$

b) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n + v_n}{2} - u_n = \dfrac{v_n - u_n}{2} \overset{v_n > u_n}{>} 0$

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{u_n + 4v_n}{5} - v_n = \dfrac{u_n - v_n}{5} \overset{u_n < v_n}{<} 0$

Les suites (u_n) et (v_n) sont respectivement croissante et décroissante.

c) $w_{n+1} = u_{n+1} - v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} - \dfrac{u_n + 4v_n}{5} = \dfrac{5u_n + 5v_n - 2u_n - 8v_n}{10}$
$= \dfrac{3(u_n - v_n)}{10} = \dfrac{3}{10} w_n$

$\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = \dfrac{3}{10}w_n,$ la suite (w_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{3}{10}$ et de premier terme $w_0 = u_0 - v_0 = -3$

$$w_n = w_0\, q^n = -3\left(\frac{3}{10}\right)^n \quad \text{or} \quad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{10}\right)^n = 0 \ \text{ donc } \ \lim_{n\to+\infty} w_n = 0.$$

Les suites (u_n) et (v_n) sont respectivement croissante et décroissante et $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$ donc les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Les suites (u_n) et (v_n) convergent donc vers la même limite ℓ.

3) $s_{n+1} = u_{n+1} + av_n = \dfrac{u_n + v_n}{2} + \dfrac{au_n + 4av_n}{5} = \dfrac{(5+2a)u_n + (5+8a)v_n}{10}$

$$= \frac{5+2a}{10}u_n + \frac{5+8a}{10}v_n$$

(s_n) géométrique alors $\ s_{n+1} = q\, s_n = q\, u_n + qa\, v_n$

Par identification avec (1), on obtient le système :

$$\begin{cases} \dfrac{5+2a}{10} = q \\ \dfrac{5+8a}{10} = qa \ \ (1) \end{cases} \quad \overset{q=\frac{5+2a}{10}}{\Leftrightarrow} (2) \quad \frac{5+8a}{10} = \frac{5a+2a^2}{10} \quad \Leftrightarrow \quad 2a^2 - 3a - 5 = 0$$

On trouve comme solution $\ a = -1\ $ ou $\ a = \dfrac{5}{2}$.

Les suites (s_n) et (t_n) sont définies respectivement par :

$s_n = u_n - v_n \quad$ et $\quad t_n = u_n + \dfrac{5}{2}v_n.$

4) On obtient les raisons suivantes : $\ q_1 = \dfrac{5-2}{10} = \dfrac{3}{10} \quad$ et $\quad q_2 = \dfrac{5+5}{10} = 1$

$$s_n = s_0\, q_1^n = s_0\left(\frac{3}{10}\right)^n \quad \text{et} \quad t_n = t_0 = u_0 + \frac{5}{2}v_0 = 4$$

5) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{3}{10}\right)^n = 0\ $ donc $\ \lim\limits_{n\to+\infty} s_n = 0\ $ et $\ \lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 4$

On sait que $\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell\ $ et $\ t_n = u_n + \dfrac{5}{2}v_n.$

En passant à la limite

$$\lim_{n\to+\infty} u_n + \frac{5}{2}v_n = 4 \ \Leftrightarrow\ \ell + \frac{5}{2}\ell = 4 \ \Leftrightarrow\ \ell = \frac{8}{7} \approx 1{,}142\,9$$

VI Fraction continue

Exercice 14

1) $u_0 = 1,\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2+u_n}$

2) $f(\alpha)=\alpha \quad \Leftrightarrow \quad 2\alpha+\alpha^2-1=0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha^2+2\alpha-1=0$

$\Delta=8=(2\sqrt{2})^2$, la racine positive $\alpha=\dfrac{-2+2\sqrt{2}}{2}=-1+\sqrt{2}$.

3) a) $u_{n+1}-\alpha \overset{\alpha=f(\alpha)}{=} \dfrac{1}{2+u_n}-\dfrac{1}{2+\alpha}=\dfrac{2+\alpha-2-u_n}{(2+u_n)(2+\alpha)}=\dfrac{\alpha-u_n}{(2+u_n)(2+\alpha)}$

$u_n \geqslant 0$ et $\alpha \geqslant 0$ alors $(2+u_n)(2+\alpha)\geqslant 4 \overset{\uparrow(-1)}{\Leftrightarrow} \dfrac{1}{(2+u_n)(2+\alpha)}\leqslant\dfrac{1}{4}$

Donc $\forall n\in\mathbb{N},\quad |u_{n+1}-\alpha|\leqslant\dfrac{1}{4}|u_n-\alpha|$.

b) De proche en proche, on déduit que :

$\forall n\in\mathbb{N},\ |u_n-\alpha|\leqslant\dfrac{1}{4}|u_{n-1}-\alpha|\leqslant\dfrac{1}{4^2}|u_{n-2}-\alpha|\leqslant\cdots\leqslant\dfrac{1}{4^n}|u_0-\alpha|$.

⚠ On peut faire une récurrence pour éviter le raisonnement de « proche en proche ».

$|u_0-\alpha|=|1-(-1+\sqrt{2}|=|2-\sqrt{2}|\leqslant 1$

$\forall n\in\mathbb{N},\ |u_n-\alpha|\leqslant\dfrac{1}{4^n}$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{4^n}=0$ par comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n-\alpha|=0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\alpha$

Exercice 15

1) $(\mathrm{E}_1):\ x=1+\dfrac{2}{x} \quad\Leftrightarrow\quad x^2-x-2=0$

$\Delta=9=3^2$, la racine positive $x=\dfrac{1+3}{2}=2$.

$(\mathrm{E}_2):\ x=1+\dfrac{2}{1+\dfrac{2}{x}} \quad\Leftrightarrow\quad x=1+\dfrac{2x}{x+2} \quad\Leftrightarrow\quad x=\dfrac{x+2+2x}{x+2} \quad\Leftrightarrow$

$x=\dfrac{3x+2}{x+2} \quad\Leftrightarrow\quad x^2+2x=3x+2 \quad\Leftrightarrow\quad x^2-x-2=0$

Même solution que pour (E_1).

$(\mathrm{E}_2)\ :\ x=1+\dfrac{2}{1+\dfrac{2}{1+\dfrac{2}{x}}} \quad\Leftrightarrow\quad x=1+\dfrac{2}{1+\dfrac{2x}{x+2}} \quad\Leftrightarrow\quad x=1+\dfrac{2(x+2)}{3x+2} \quad\Leftrightarrow$

$x=\dfrac{5x+6}{3x+2} \quad\Leftrightarrow\quad 3x^2+2x=5x+6 \quad\Leftrightarrow\quad 3x^2-3x-6=0 \overset{\div 3}{\Leftrightarrow}$
$x^2-x-2=0$

Même solution que pour (E_1).

On peut conjecturer que pour tout $n\geqslant 1$, (E_n) a la même solution que (E_1).

2) a) $f(x) = x \Leftrightarrow 1 + \dfrac{2}{x} = x \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$\Delta = 9$ on a deux racines $\alpha = -1$ ou $\beta = 2$

b) La fonction f est décroissante car la fonction $x \mapsto \dfrac{2}{x}$ est décroissante.

Montrons par récurrence : $x_n \neq \alpha$

Initialisation : $n = 0$, $x_0 \neq \alpha$. La proposition est initialisée.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $x_n \neq \alpha$, montrons alors que $x_{n+1} \neq \alpha$.

$x_n \neq \alpha \overset{f \text{ monotone}}{\Rightarrow} f(x_n) \neq f(\alpha) \Leftrightarrow x_{n+1} \neq \alpha$.

La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité : $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n \neq \alpha$.

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$.

$$u_{n+1} = \frac{x_{n+1} - \beta}{x_{n+1} - \alpha} \overset{\alpha = f(\alpha) \text{ et } \beta = f(\beta)}{=} \frac{1 + \dfrac{2}{x_n} - 1 - \dfrac{2}{\beta}}{1 + \dfrac{2}{x_n} - 1 - \dfrac{2}{\alpha}}$$

$$= \frac{2\beta - 2x_n}{\beta x_n} \times \frac{\alpha x_n}{2\alpha - 2x_n} = \frac{-2(x_n - \beta)}{\beta} \times \frac{\alpha}{-2(x_n - \alpha)}$$

$$= \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{x_n - \beta}{x_n - \alpha} = \frac{\alpha}{\beta} u_n$$

(u_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{\alpha}{\beta} = -\dfrac{1}{2}$ et de 1er terme $u_0 = \dfrac{x_0 - \beta}{x_0 - \alpha}$.

c) On a donc $u_n = \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \dfrac{x_0 - \beta}{x_0 - \alpha}$.

3) L'équation (E_n) consiste à résoudre $x_0 = x_n$ donc il faut que $u_n = u_0$. Ceci n'est possible que si $u_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \beta = 2$

Pour toutes les valeurs de $n \geqslant 1$, (E_n) a pour solution 2.

VII Encadrement de Pi - méthode d'Archimède

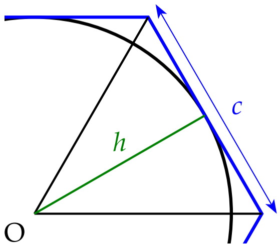
EXERCICE 16

1) Le cas $n = 1$: Le cercle est donc encadré par deux hexagones (figure).

- Pour P_1 : L'hexagone est constitué de 6 triangles équilatéraux isométriques dont le côté vaut le rayon du cercle soit 1. Le demi-périmètre p_1 vaut donc :

$$p_1 = 3 \times 1 = 3$$

- Pour Q_1 : L'hexagone est constitué de 6 triangles équilatéraux isométriques dont la hauteur h, issue du centre du cercle, vaut le rayon du cercle soit 1. Si c est la longueur du côté de ces triangles équilatéraux, on a alors :



$$\frac{c\sqrt{3}}{2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad c = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \text{donc} \quad q_1 = 3 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = 2\sqrt{3}$$

On a donc l'encadrement : $3 < \pi < 2\sqrt{3}$

2) Expression de p_n, et q_n

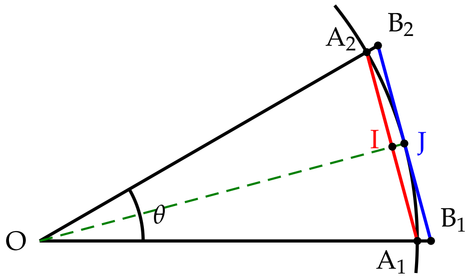
a) Si le polygone inscrit et exinscrit possède 3×2^n côtés, l'angle au centre θ vaut donc :

$$\theta = \frac{2\pi}{3 \times 2^n} = \frac{\pi}{3 \times 2^{n-1}}$$

b) On peut faire la figure suivante, pour exprimer le côté des polygone :

Si $[\mathrm{A_1A_2}]$ est un côté du polygone P_n, le triangle $\mathrm{OA_1A_2}$ est isocèle. Si I est le milieu du segment $[\mathrm{A_1A_2}]$, la droite (OI) représente la bissectrice de l'angle $\widehat{\mathrm{A_1OA_2}}$ ainsi que la hauteur issue de O. On a donc :

$$\widehat{\mathrm{IOA_1}} = \frac{1}{2}\theta = \frac{\pi}{3 \times 2^n}$$



On a donc : $\mathrm{IA_1} = \mathrm{OA_1} \times \sin\left(\dfrac{\pi}{3 \times 2^n}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{3 \times 2^n}\right)$

donc $\mathrm{A_1A_2} = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{3 \times 2^n}\right)$

Le demi-périmètre ($3 \times 2^{n-1}$ côtés) vaut donc :

$$p_n = 3 \times 2^{n-1} \times 2\sin\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right) = 3 \times 2^n \sin\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right)$$

Si $[\mathrm{B_1B_2}]$ est un côté du polygone Q_n, le triangle $\mathrm{OB_1B_2}$ est isocèle. Si J est le milieu du segment $[\mathrm{B_1B_2}]$, la droite (OJ) représente la bissectrice de l'angle $\widehat{\mathrm{B_1OB_2}}$ ainsi que la hauteur issue de O. On a donc :

$$\widehat{\mathrm{JOB_1}} = \frac{1}{2}\theta = \frac{\pi}{3 \times 2^n}$$

On a donc avec $\mathrm{OJ} = 1$: $\mathrm{JB_1} = \mathrm{OJ} \times \tan\left(\dfrac{\pi}{3 \times 2^n}\right) = \tan\left(\dfrac{\pi}{3 \times 2^n}\right)$

donc $\mathrm{B_1B_2} = 2\tan\left(\dfrac{\pi}{3 \times 2^n}\right)$

Le demi-périmètre ($3 \times 2^{n-1}$ côtés) vaut donc :

$$q_n = 3 \times 2^{n-1} \times 2\tan\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right) = 3 \times 2^n \tan\left(\frac{\pi}{3 \times 2^n}\right)$$

3) Relations de récurrence

a) On a : $p_n = 3 \times 2^n \sin 2\alpha$ et $q_n = 3 \times 2^n \tan 2\alpha$

b) On a : $\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$ et $1 + \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$

c) $$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p_n} + \frac{1}{q_n}\right) = \frac{1}{3 \times 2^{n+1}}\left(\frac{1}{\sin 2\alpha} + \frac{1}{\tan 2\alpha}\right) = \frac{1}{3 \times 2^{n+1}}\left(\frac{1+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}\right)$$
$$= \frac{1}{3 \times 2^{n+1}}\left(\frac{2\cos^2\alpha}{2\cos\alpha\sin\alpha}\right) = \frac{1}{3 \times 2^{n+1}}\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)$$
$$= \frac{1}{3 \times 2^{n+1}}\left(\frac{1}{\tan\alpha}\right) = \frac{1}{q_{n+1}}$$

$$\sqrt{p_n q_{n+1}} = \sqrt{3 \times 2^n \sin 2\alpha \times 3 \times 2^{n+1}\tan\alpha} = \sqrt{(3 \times 2^n)^2 \times 2 \sin 2\alpha \tan\alpha}$$
$$= \sqrt{(3 \times 2^n)^2 \times 4 \sin\alpha\cos\alpha \times \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \sqrt{(3 \times 2^n)^2 \times 4\sin^2\alpha}$$
$$= 3 \times 2^{n+1}\sin\alpha = p_{n+1}$$

d) On obtient : $\dfrac{1}{q_2} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{q_1}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{6}\right) = \dfrac{2+\sqrt{3}}{12}$

donc : $q_2 = \dfrac{12}{2+\sqrt{3}} = 12(2-\sqrt{3}) \simeq 3,21$

et $p_2 = \sqrt{p_1 q_2} = \sqrt{3 \times 12(2-\sqrt{3})} = 6\sqrt{2-\sqrt{3}} \simeq 3,105$

4) Étude des suites (p_n) et (q_n)

a) $$0 \leqslant a \leqslant b \quad \left.\begin{array}{l} \overset{\times a}{\Rightarrow} \quad a^2 \leqslant ab \\ \overset{\times b}{\Rightarrow} \quad ab \leqslant b^2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad a^2 \leqslant ab \leqslant b^2.$$

Comme la fonction racine est une fonction croissante, on a donc l'encadrement : $a \leqslant \sqrt{ab} \leqslant b$

Comme $0 \leqslant a \leqslant b$, on a :

$$a + b \leqslant 2b \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{a+b} \geqslant \frac{1}{2b} \quad \overset{\times 2ab}{\Leftrightarrow} \quad \frac{2ab}{a+b} \geqslant a \quad \text{(i)}$$

$$\frac{2ab}{a+b} = \frac{[(a+b)^2 - (a-b)^2]}{2(a+b)} \leqslant \frac{(a+b)^2}{2(a+b)} \quad \text{or} \quad \frac{(a+b)^2}{2(a+b)} = \frac{a+b}{2} \leqslant b \quad \text{(ii)}$$

b) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}*,\ p_n < q_n$ par récurrence :

Initialisation : : pour $n = 1,\ p_1 < q_1$. La proposition est initialisée.

Hérédité : : Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $0 < p_n < q_n$

On a $\dfrac{1}{q_{n+1}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{p_n} + \dfrac{1}{q_n}\right)$ donc $q_{n+1} = \dfrac{2p_n q_n}{p_n + q_n}$ de plus $p_{n+1}^2 = p_n q_{n+1}$

$$\begin{aligned}
q_{n+1}^2 - p_{n+1}^2 &= \frac{4p_n^2q_n^2}{(p_n+q_n)^2} - p_n \times \frac{2p_nq_n}{p_n+q_n} = \frac{4p_n^2q_n^2 - 2p_n^2q_n(p_n+q_n)}{(p_n+q_n)^2}\\
&= \frac{4p_n^2q_n^2 - 2p_n^3q_n - 2p_n^2q_n^2}{(p_n+q_n)^2} = \frac{2p_n^2q_n^2 - 2p_n^3q_n}{(p_n+q_n)^2}\\
&= \frac{2p_n^2q_n(q_n-p_n)}{(p_n+q_n)^2}
\end{aligned}$$

Comme $0 < p_n < q_n$, on en déduit que $q_{n+1}^2 - p_{n+1}^2 > 0$ et comme les termes sont positifs, on a : $q_{n+1} > p_{n+1}$.

La proposition est héréditaire.

Par initialisation et hérédité, on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \;\; p_n < q_n$

c) On a $\forall n \in \mathbb{N},\;\; 0 < p_n < q_n$, donc d'après la relation (ii)

$$q_{n+1} = \frac{2p_nq_n}{p_n+q_n} \overset{\text{(ii)}}{\Rightarrow} q_{n+1} < q_n$$

La suite (q_n) est donc décroissante.

De la relation (i) $\;\; p_n < \dfrac{2p_nq_n}{p_n+q_n}$

$$p_{n+1} = \sqrt{p_nq_{n+1}} = \sqrt{p_n\frac{2p_nq_n}{p_n+q_n}} \overset{\text{(i)}}{\Rightarrow} p_{n+1} > \sqrt{p_n^2} \;\;\Rightarrow\;\; p_{n+1} > p_n$$

La suite (p_n) est donc croissante.

d) $$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N}^*, \;\; q_{n+1} - p_{n+1} &= \frac{2p_nq_n}{p_n+q_n} - \sqrt{p_nq_{n+1}}\\
&\leqslant \frac{p_n+q_n}{2} - p_n \qquad \text{car} \;\; \frac{2ab}{a+b} < \frac{a+b}{2} \;\; \text{et} \;\; \sqrt{ab} \geqslant a\\
&\leqslant \frac{q_n-p_n}{2}
\end{aligned}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \;\; q_{n+1} - p_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}(q_n - p_n).$

On pose $\;u_n = q_n - p_n\;$ donc $\;\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{1}{2}.$

$$\prod_{k=1}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_n} \leqslant \prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2} \;\;\Leftrightarrow\;\; \prod_{k=1}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_n} \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \quad \text{or} \quad \prod_{k=1}^{n-1} \frac{u_{k+1}}{u_n} = \frac{u_n}{u_1}$$

en conséquence $\;\dfrac{u_n}{u_1} \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\;$ et donc $\;q_n - p_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}(q_1 - p_1)$

or $\;q_1 - p_1 = 2\sqrt{3} - 3 < 0,5,\;$ d'où $\;0 \leqslant q_n - p_n \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

D'après le théorème des gendarmes : $\;\lim\limits_{n\to+\infty}(q_n - p_n) = 0\;$ car $\;\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$

Les suites (p_n) et (q_n) sont respectivement croissante et décroissante et la différence de leurs termes tend vers 0, les suites (p_n) et (q_n) sont donc adjacentes et tendent alors vers une même limite ℓ qui ne peut être que l'aire d'un demi cercle de rayon 1 soit $\ell = \pi$

e) $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \lim\limits_{n \to +\infty} q_n = \pi$

5) On programme les suites (p_n) et (q_n) sur la calculatrice.

n	p_n	q_n	$q_n - p_n$
2	$3,105$	$3,215$	10^{-1}
5	3,141 03	3,142 71	$1,6.10^{-3}$
10	3,141 592 1	3,141 593 7	$1,6.10^{-6}$
15	3,141 592 653 2	3,141 592 654 8	$1,6.10^{-9}$
17	3,141 592 653 58	3,141 592 653 68	$1,0.10^{-10}$

On peut remarquer que l'on gagne trois décimales toutes les cinq itérations. Pour trouver l'entier n pour lequel l'encadrement est de 10^{-10}, on peut proposer l'algorithme suivant :

```
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
PROGRAM:ARCHIMED
:1→N
:3→P
:2√(3)→Q
:While Q-P>1.01E-10
:2PQ/(P+Q)→Q
:√(PQ)→P
:N+1→N
:End
:Disp P,Q,Q-P,N
```

Variables : N : entier P, Q : réels
Entrées et initialisation
- $1 \to N$
- $3 \to P$
- $2\sqrt{3} \to Q$

Traitement
- **tant que** $Q - P > 1,01 \times 10^{-10}$ **faire**
  - $\dfrac{2PQ}{P+Q} \to Q$
  - $\sqrt{PQ} \to P$
  - $N + 1 \to N$
- **fin**

Sorties : Afficher $P, Q, Q-P, N$

La calculatrice renvoie alors :

```
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP
prgmARCHIMED
                    3.141592654
                    3.141592654
                       1.002E-10
                              17
                            Fait
```